APÉNDICE

c) Calcular el trabajo realizado por $\vec{N}_\varphi$ cuando la partícula se desplaza desde θ_1 a θ_2 (Note que no estoy especificando cómo se desplaza...)

Lo haremos INTEGRANDO LA POTENCIA :

$u = \sin\theta$
$du = \cos\theta \, d\theta$

$$W_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} P_{\vec{N}_\varphi}(t)\,dt = 2mR^2\omega^2 \int_{t_1}^{t_2} \sin\theta\cos\theta\, \overbrace{\dot{\theta}\,dt}^{d\theta} = 2mR^2\omega^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2mR^2\omega^2 \int_{u_1}^{u_2} u\,du$$

$$= 2mR^2\omega^2 \frac{u^2}{2}\Big|_{u_1}^{u_2} = mR^2\omega^2\sin^2\theta\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = mR^2\omega^2\sin^2\theta_2 - mR^2\omega^2\sin^2\theta_1$$

Si definimos $U_{N_\varphi} = -mR^2\omega^2\sin^2\theta \Rightarrow W_{1\to2} = -\Delta U_{N_\varphi} \Rightarrow$ ES CONSERVATIVA!

(SI NO LO NOTAMOS NO PASA NADA, LA TRATAMOS COMO RESIDUAL Y PLANTEAMOS $\frac{dE}{dt} = P_{res}$)

Luego, podemos redefinir la energía como $E = K + U_E + U_{\vec{N}_\varphi}$ y obtener nuevamente la ec. mov. planteando que $\frac{dE}{dt} = 0$

Veamos:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{v}^2 = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta$$

$$U_E = \frac{1}{2} k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2} kR^2 (1-\cos\theta)^2$$

$$U_{N_\varphi} = -mR^2\omega^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta}_{K} + \underbrace{\frac{1}{2} kR^2 (1-\cos\theta)^2}_{U_E} \underbrace{- mR^2\omega^2 \sin^2\theta}_{U_{N_\varphi}}$$

$$= \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} kR^2 (1-\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} + kR^2(1-\cos\theta)\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$/\, mR^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta\cos\theta + k/m \sin\theta - k/m \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \sin\theta\left[(\omega^2 + k/m)\cos\theta - k/m\right] = 0} \quad ✓$$

1) Si NO NOTO que $\vec{N}_\varphi$ deriva de un potencial

$\Rightarrow$ hallo su potencia y planteo que $\frac{d}{dt}(K+U_E) = P_{\vec{N}_\varphi}$

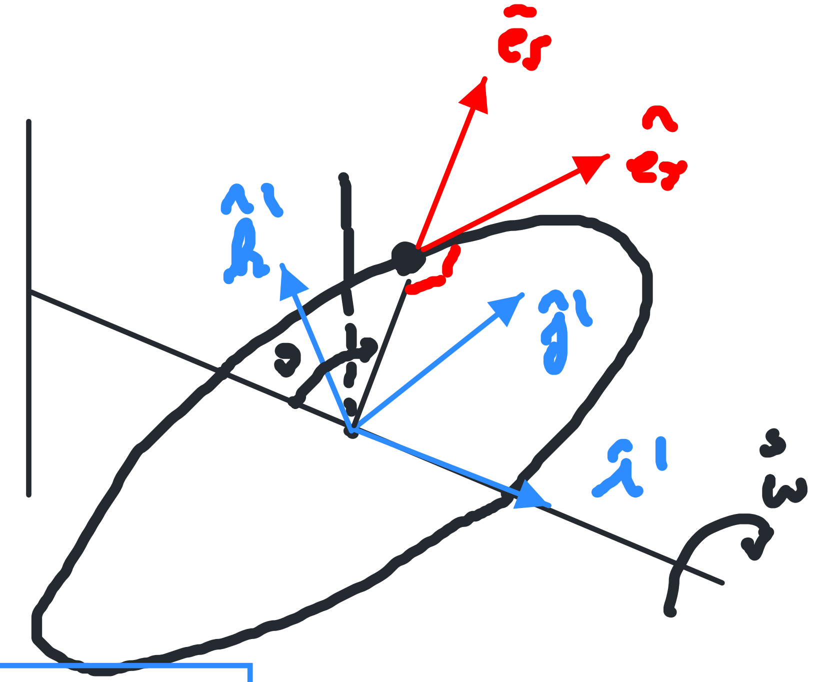
2) Si NOTO que $\exists\, U_{N_\varphi} \,/\, W_{N_\varphi} = -\Delta U_{N_\varphi}$

$\Rightarrow$ planteo $\frac{d}{dt}(K+U_E+U_{N_\varphi}) = 0$

(CAMINOS EQUIVALENTES)

OTRA VISIÓN: ENERGÍA EN EL SISTEMA SOLIDARIO A LA GUÍA

Consideremos el sistema $\{O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ solidario a la guía, $\vec{\omega}_{S'/S} = -\omega\,\hat{i}'$



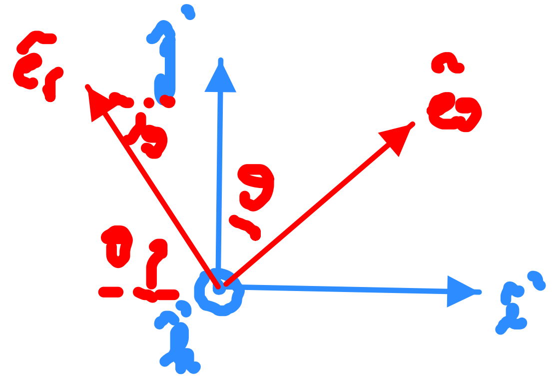
$\vec{r}' = R\hat{e}_r \Rightarrow \vec{v}' = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\hat{e}_r}$ RELATIVA

$\boxed{\vec{a}_{O'} = 0}$, $\dot{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = 0}$

$\vec{\omega}\times\vec{r}' = -\omega\hat{i}' \times R\hat{e}_r = -\omega R\sin\theta\,\hat{k}' \Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -\omega\hat{i}'\times(-\omega R\sin\theta\,\hat{k}')$

$$\left.\boxed{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -R\omega^2\sin\theta\,\hat{j}'}\right\} \quad \boxed{\vec{a}_T = -R\omega^2\sin\theta\,\hat{j}'}$$

TRANSPORTE



$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{v}' = -2\omega\hat{i}' \times R\dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = -2R\cos\theta\,\omega\dot{\theta}\,\hat{k}'}$ CORIOLIS

$$\Rightarrow \boxed{\text{En } S': \begin{cases} \vec{F}_N + \vec{F}_T + \vec{F}_C = m\vec{a}' \\ \vec{F}_T = -m\vec{a}_T = mR\omega^2\sin\theta\,\hat{j}' \\ \vec{F}_C = -m\vec{a}_C = 2mR\cos\theta\,\omega\dot{\theta}\,\hat{k}' \end{cases}}$$

Tenemos : $\vec{F}_N + \vec{F}_T + \vec{F}_c = m\vec{a}'$, con $\begin{cases} \vec{F}_N = \vec{F}_E + N_r\hat{e}_r + N_\varphi\hat{e}_\varphi \\ \vec{F}_T = -m\vec{a}_T = mR\omega^2 \sin\theta\, \hat{j}' \\ \vec{F}_c = -m\vec{a}_c = 2mR\cos\theta\,\omega\,\dot{\theta} \end{cases}$ } Clasificamos las fuerzas DESDE EL PUNTO DE VISTA DE UN OBSERVADOR EN S'

$\vec{F}_E = -K\Delta l\,\hat{n}' \Rightarrow U_E = \frac{K\Delta l^2}{2}$ cumple que $\vec{\nabla} U = -\vec{F}_E \Rightarrow$ CONSERVATIVA $\left(U_E = \frac{KR^2(1-\cos\theta)^2}{2} \right)$

$\vec{N}_r \cdot \vec{v}' = N_r\hat{e}_r \cdot R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = 0 \Rightarrow$ POTENCIA NULA

$\vec{N}_\varphi \cdot \vec{v}' = N_\varphi\hat{e}_\varphi \cdot R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = 0 \Rightarrow$ POTENCIA NULA EN S' !

$\vec{F}_T \cdot \vec{v}' = mR\omega^2 \sin\theta\,\hat{j}' \cdot R\dot{\theta}\hat{e}_\theta = mR^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow W_{\vec{F}_T} = \left.\frac{mR^2\omega^2 \sin^2\theta}{2}\right|_{\theta_1}^{\theta_2} \Rightarrow \boxed{U_{F_T} = -\frac{1}{2} mR^2\omega^2 \sin^2\theta}$

CONSERVATIVA

$\vec{F}_c \cdot \vec{v}' = (2\vec{\omega} \times \vec{v}') \cdot \vec{v}' = 0 \Rightarrow \vec{F}_c$ de POTENCIA NULA (SIEMPRE!)

$\Rightarrow$ COMO TODAS LAS FUERZAS SON CONSERVATIVAS O DE POTENCIA NULA (INCLUYENDO LAS FICTICIAS!)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{SE CONSERVA LA ENERGÍA EN } S'}$

Podemos utilizar lo anterior para obtener la ec. de movimiento nuevamente (4to método!)

$\Rightarrow K' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$ (energía cinética RELATIVA A S')

$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} k R^2 (1-\cos\theta)^2$

$\Rightarrow U_{F_T} = -\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{E' = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} k R^2 (1-\cos\theta)^2 = cte}$$

Idéntica a la obtenida previamente
$\Rightarrow$ SE DERIVA LA MISMA EC. DE MOVIMIENTO.

POTENCIAL EFECTIVO ASOCIADO A $\vec{F}_{TRANSPORTE}$ EN S'

En S: $= \underbrace{\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta}_{\text{"}K_0} \underbrace{- m R^2 \omega^2 \sin^2\theta}_{U_{N\phi}}$

K_0 = PARTE DE K (ABSOLUTA) QUE NO DEPENDE DE $\dot{\theta}$