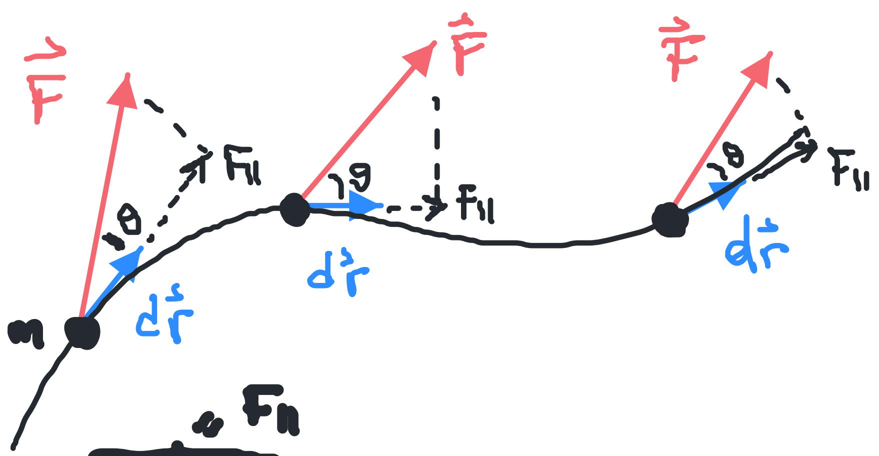
CLASE 5: TRABAJO Y ENERGÍA

En esta clase:

- ⇨ Repasaremos los conceptos de trabajo y potencia de una fuerza
- ⇨ Aprenderemos a clasificar fuerzas de acuerdo a su relación con la energía del sistema. A partir de esta clasificación, aprenderemos a obtener la ecuación de movimiento del sistema (o una de ellas) a partir de argumentos energéticos.
- ⇨ Aprenderemos a hallar y clasificar las posiciones de equilibrio relativo del sistema

➩ **TRABAJO**: $\boxed{W \overset{def}{=} \int_{\vec r_i}^{\vec r_f} \vec F\cdot d\vec r}$



➩ Notar que $\vec F\cdot d\vec r = |\vec F||d\vec r|\cos\theta = \overbrace{|\vec F|\cos\theta}^{=F_\parallel}|d\vec r| = F_\parallel|d\vec r|$ → sólo la componente de $\vec F$ tangencial a la trayectoria contribuye al trabajo

➩ W es una **FUNCIÓN DE TRAYECTORIA**: Si la partícula sigue un camino diferente entre $\vec r_i$ y $\vec r_f$ ⇒ **EN GENERAL, W ES DIFERENTE**

➩ **POTENCIA**: $P \overset{def}{=} \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec F\cdot d\vec r}{dt}$, $\quad \frac{d\vec r}{dt} = \vec v$ ⇒ $\boxed{P = \vec F\cdot\vec v}$

Si $P=0$ → $\vec F$ es una fuerza **DE POTENCIA NULA**: $\left\{ \begin{array}{l} \vec F\perp\vec v \ \forall t \\ \vec v = 0 \ (\vec F \text{ aplicada en pto fijo}) \end{array} \right.$

➩ Como $P = \frac{\delta W}{dt}$ ⇒ $\boxed{W = \int_{t_i}^{t_f} P(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec F\cdot\vec v\,dt}$ → Forma usual de calcular W

➪ TEOREMA DE LA ENERGÍA

$$\left.\begin{array}{l} W_{F_{NETA}} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}_N \cdot d\vec{r} \\ \vec{F}_N = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow W_{F_N} = m\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_{t_i}^{t_f} d\vec{v}\cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot d\vec{v} = m\left(\frac{\vec{v}_f^{\,2}}{2} - \frac{\vec{v}_i^{\,2}}{2}\right)$$

$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$

Definiendo la ENERGÍA CINÉTICA: $K = \dfrac{m\vec{v}^{\,2}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{\vec{F}_N} = \Delta K}$$

TEOREMA DE LA ENERGÍA

Nota: Para aplicarlo es necesario calcular los trabajos de TODAS LAS FUERZAS $\Rightarrow$ POCO PRÁCTICO (veremos una versión más amigable)

➪ CLASIFICACIÓN DE FUERZAS

1) CONSERVATIVAS: $\exists\, U(\vec{r}) \,/\, \vec{F} = -\nabla U$; $U = -\int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + C$ se denomina ENERGÍA POTENCIAL ASOCIADA A $\vec{F}$

2) NO CONSERVATIVAS ($\nexists\, U \,/\, \vec{F} = -\nabla U$)

- DE POTENCIA NULA: $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0 \;\forall t$
- RESIDUALES (realizan trabajo)

¿Qué ganamos al introducir la clasificación anterior?

Teníamos el Teorema de la energía: $\Delta K = W_{\vec{F}_{NETA}}$

Podemos escribir $\vec{F}_N = \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{pot\ nula} + \vec{F}_{residuales}$

$$\Rightarrow \Delta K = W_{\vec{F}_{cons.}} + W_{\vec{F}_{pot.nula}} + W_{\vec{F}_{res.}} \quad (1)$$

$$* \; W_{\vec{F}_{cons}} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} \underset{\exists U / \vec{F} = -\nabla U}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} -\nabla U \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} dU = -\left(U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i)\right) = -\Delta U \Rightarrow \boxed{W_{\vec{F}_{cons}} = -\Delta U} \quad (2)$$

$$* \; W_{\vec{F}_{pot.nula}} = \int_{t_i}^{t_f} \overbrace{P(t)}^{=0}\, dt \Rightarrow \boxed{W_{\vec{F}_{pot\ nula}} = 0} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U + W_{\vec{F}_{residuales}} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = W_{\vec{F}_{residuales}}$$

Defino la ENERGÍA MECÁNICA: $E = K + U$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = W_{\vec{F}_{residuales}}}$$

VERSIÓN ALTERNATIVA

(sólo requiere calcular los residuales)

EN PARTICULAR: Si NO HAY FUERZAS RESIDUALES $\Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E = cte$

⇨ ¿Cómo podemos obtener la ec. movimiento mediante argumentos energéticos?

⇒ DEBO CLASIFICAR LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA PARTÍCULA

CASO 1: SON TODAS CONSERVATIVAS O DE POTENCIA NULA ⇒ $E = cte$

aparece $\vec{v}$ a través de K

⇒ 2 posibilidades → $\boxed{E(t) = E(t_0)}$ → Versión "integrada" de la ec. mov. (1er orden en la posición)

$E(t)$ = Energía expresada en función de coordenadas y sus derivadas

$E(t_0)$ = Valor numérico de la expresión anterior calculado a partir de los datos iniciales $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$

→ $E(t) = cte$ → $\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$ → Versión usual (2º orden en la posición)

⇒ EQUIVALENTE A APLICAR 2ª LEY DE NEWTON

Nota: Por energía obtenemos UNA ecuación de movimiento: si el sistema tiene más de 1 grado de libertad ⇒ FALTAN ECUACIONES

CASO 2: EXISTE ALGUNA FUERZA RESIDUAL → $\boxed{\Delta E = W_{F\,residual}}$ → $\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{F\,residual}}$

EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

⇨ Ptos. de equilibrio: son las **SOLUCIONES ESTACIONARIAS** de la ec. de movimiento : $f(q,\dot{q},\ddot{q})=0$

↳ Funciones constantes que satisfacen la ecuación ⇒ Si la partícula parte de esa posición con "velocidad" $\dot{q}$ nula, PERMANECERÁ EN DICHA POSICIÓN

⇨ Puedo obtenerlos de la propia ecuación de movimiento **IMPONIENDO QUE TODAS LAS DERIVADAS SEAN CERO**

Ejemplo:

$\theta = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left[w^2\cos\theta - K/m\right] = 0 \Rightarrow \sin\theta\left[w^2\cos\theta - K/m\right] = 0$$

→ $\sin\theta = 0$ → $\boxed{\theta = 0}$, $\boxed{\theta = \pi}$

→ $\cos\theta = \frac{K}{mw^2} \Rightarrow \boxed{\theta = \pm\arccos\left(\frac{K}{mw^2}\right)}$

⇨ Pueden ser

→ **ESTABLES**: ante una pequeña perturbación, permanece en un entorno de dicha posición

→ **INESTABLES**: " " " " , la partícula **se aleja**

¿Cómo determinar la estabilidad?

⇨ Trabajaremos con ecuaciones del tipo $\ddot{q}+f(q)=0$ → sist. conservativos unidimensionales / sist. no conservativos preintegrables $\Big\}\ \frac{\dot{q}^2}{2}+F(q)=cte$

⇨ En el caso $\Big\{$ conservativo, $F(q)$ es esencialmente la ENERGÍA POTENCIAL $U(q)$
preintegrable, $F(q)$ se denomina POTENCIAL EFECTIVO, $F(q)=U(q)+K_\circ(q)$ → parte de K que depende de q y NO DE $\dot{q}$

⇨ Hallamos las pos. equilibrio imponiendo $\ddot{q}=0 \Rightarrow f(q)=0$ (q_{eq} son las raíces de $f(q)$)

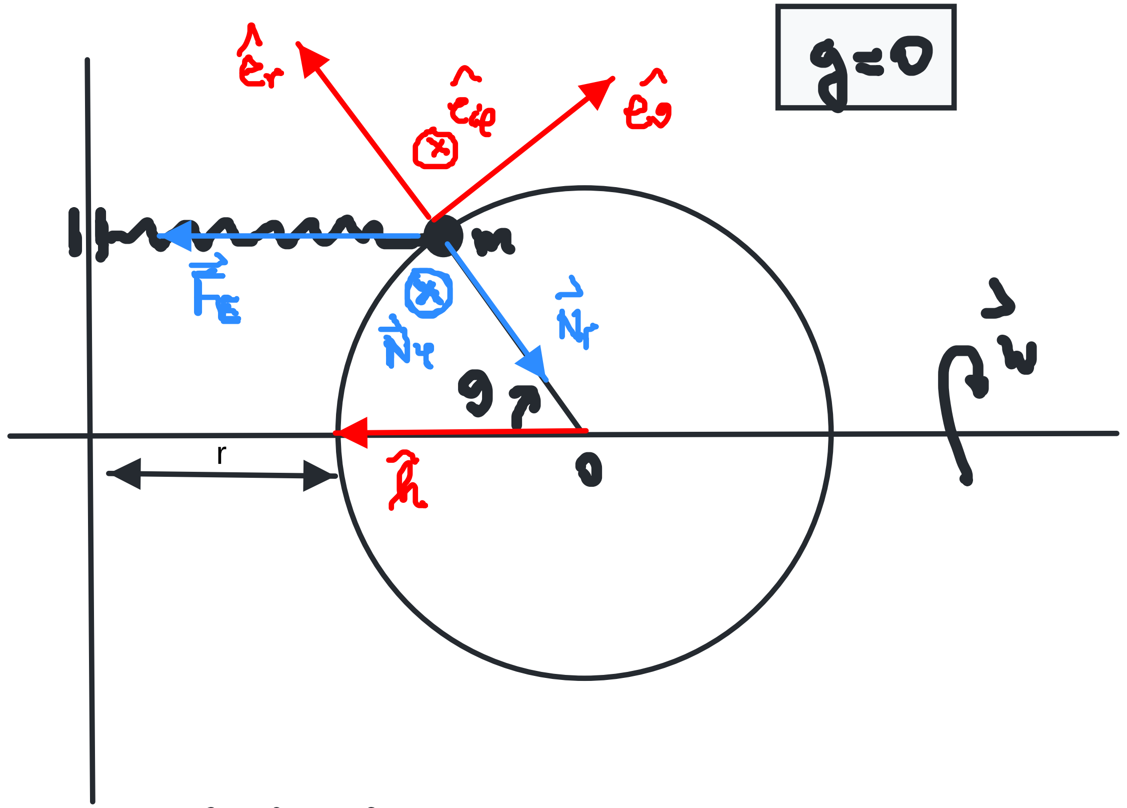
⇨ Perturbo un poquito: $q=q_{eq}+\delta \Rightarrow \dot{q}=\dot{\delta} \Rightarrow \ddot{q}=\ddot{\delta}$,
$f(q)\simeq \cancel{f(q_{eq})}+f'(q_{eq})\,\delta$ $\Big\}\Rightarrow \boxed{\ddot{\delta}+f'(q_{eq})\,\delta=0}$ EC. DIFERENCIAL QUE GOBIERNA A LA PEQUEÑA PERTURBACIÓN δ

CASO 1: $f'(q_{eq})>0 \Rightarrow$ ESTABLE (soluciones oscilatorias)
CASO 2: $f'(q_{eq})<0 \Rightarrow$ INESTABLE (soluciones exponenciales ⇒ se aleja)

NOTA: SOLO NECESITAMOS $f'(q)$
⇒ No ES NECESARIO HALLAR $F(q)$
(No integro para derivar 2 veces...)

EJEMPLO

$\boxed{g=0}$



→ Partícula de masa m enhebrada en guía circular lisa de radio R (vínculo bilateral)

→ Resorte de cte k, $l_0 = R$, siempre horizontal

→ Sistema gira con $\vec{\omega}$ = cte alrededor del eje horizontal (NO ACTÚA EL PESO)

a) Hallar la ecuación de movimiento por 2 caminos

b) Hallar las posiciones de equilibrio y estudiar su estabilidad

Grados de libertad:

Movimiento en 3D ⇒ A priori, 3 coordenadas (como la guía engendra una esfera, CONVIENE TRABAJAR EN ESFÉRICAS → r, θ, φ)

Vínculo geométrico: $r = R = cte \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$
" cinemático: $\varphi = \omega t + \varphi_0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \omega \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$
] 2 vínculos

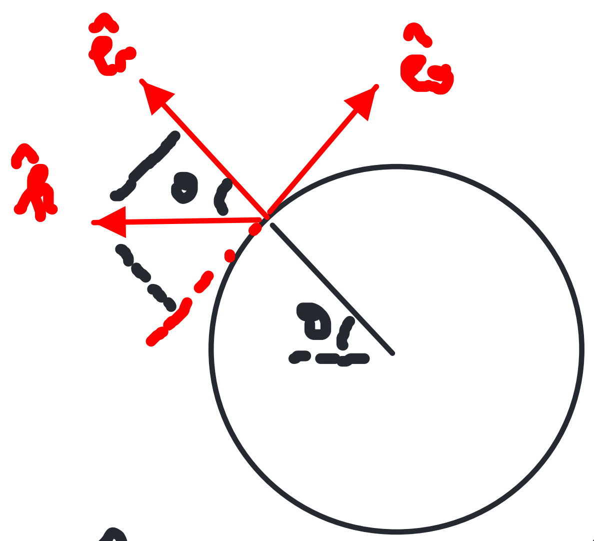
⇒ EL SISTEMA TIENE 3-2=1 GRADO DE LIBERTAD ⇒ 1 EC. MOV.

(en θ y sus derivadas)

FORMA 1 : NEWTON

$\vec{F}_N = \vec{F}_E + N_r\,\hat{e}_r + N_\varphi\,\hat{e}_\varphi$

Hay que presuponer que $N_\varphi \neq 0$ (puede ser necesaria para mantener $\vec{\omega} = cte$)



$\hat{h} = \cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_E &= K(\ell-\ell_0)\,\hat{h} \\ \ell &= 2R - R\cos\theta \\ \ell_0 &= R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F}_E = KR(1-\cos\theta)\,\hat{h}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_N = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{e}_r = m\vec{a}\cdot\hat{e}_r \to KR(1-\cos\theta)\cos\theta + N_r = m\left(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2 - \overset{R}{r}\sin^2\theta\,\overset{\omega}{\dot{\varphi}^2}\right) \to KR(1-\cos\theta)\cos\theta + N_r = -mR\dot{\theta}^2 - mR\omega^2\sin^2\theta \quad (1)$$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{e}_\theta = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\theta \to -KR(1-\cos\theta)\sin\theta = m\left(2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right) \to -KR(1-\cos\theta)\sin\theta = mR\ddot{\theta} - mR\omega^2\sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{e}_\varphi = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\varphi \to N_\varphi = m\left(\cancel{2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \cancel{r\sin\theta\,\ddot{\varphi}}\right) \to N_\varphi = 2R\omega\cos\theta\,\dot{\theta} \quad (3)$$

Como (2) no incluye fuerza vincular $\Rightarrow$ ES LA EC. MOV: $\boxed{\ddot{\theta} - \sin\theta\left[(\omega^2 + K/m)\cos\theta - K/m\right] = 0}$

FORMA 2: ENERGÍA

Para saber si E es o no constante, DEBEMOS CLASIFICAR LAS FUERZAS

⇨ $\vec{F}_E$ es CONSERVATIVA: $U_E = \frac{K\Delta l^2}{2} = \frac{KR^2(1-\cos\theta)^2}{2}$

⇨ $\vec{N}_r$: $\vec{N}_r = N_r \hat{e}_r$
$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta + R\sin\theta\,\omega\,\hat{e}_\varphi$ $\Rightarrow P_{\vec{N}_r} = N_r\hat{e}_r \cdot (R\dot{\theta}\hat{e}_\theta + R\sin\theta\,\omega\,\hat{e}_\varphi) = 0 \Rightarrow \vec{N}_r$ es DE POTENCIA NULA

⇨ $\vec{N}_\varphi$: $\vec{N}_\varphi = N_\varphi \hat{e}_\varphi \overset{\text{Newton}}{=} 2mR\cos\theta\,\omega\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi$
$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta + R\sin\theta\,\omega\,\hat{e}_\varphi$ $\Rightarrow \boxed{P_{\vec{N}_\varphi} = 2mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} \neq 0}$ $\Rightarrow$ La voy a tratar como RESIDUAL

(ESTO PUEDO HACERLO INCLUSO SI FUERA CONSERVATIVA, ASPECTO QUE ANALIZAREMOS LUEGO)

OBS: Si la partícula permanece en una de sus posiciones de equilibrio relativo a la guía $(\dot{\theta} = 0\ \forall t) \Rightarrow$ No SE NECESITA $\vec{N}_\varphi$ PARA MANTENER EL MOVIMIENTO

⇒ OBTENDREMOS LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO A PARTIR DE LA RELACIÓN: $\dfrac{dE}{dt} = P_{N\varphi}$

$$\left.\begin{array}{l} K = \frac{1}{2} m \dot{\vec{v}}^2 \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + R\sin\theta\,\omega\,\hat{e}_\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} K R^2 (1-\cos\theta)^2} \quad , \quad E = K + U$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta + \frac{1}{2} K R^2 (1-\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \cancel{\tfrac{1}{2}} m \cancel{R^2}\, \cancel{2} \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} + \cancel{\tfrac{1}{2}} m \cancel{R^2} \omega^2\, \cancel{2} \sin\theta \cos\theta \cancel{\dot{\theta}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} K \cancel{R^2}\, \cancel{2} (1-\cos\theta)(\sin\theta \cancel{\dot{\theta}}) = 2m\cancel{R^2}\omega^2 \sin\theta \cos\theta \cancel{\dot{\theta}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta\cos\theta + K/m\,(1-\cos\theta)\sin\theta = 2\omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \sin\theta\left[(\omega^2 + K/m)\cos\theta - K/m\right] = 0} \quad \checkmark$$

OBS: NO INCLUIR $P_{N\varphi}$ SÓLO CAMBIA UN SIGNO EN LA EC. MOV.
SIN EMBARGO, <u>ES UN ERROR CONCEPTUAL GRAVE</u>

b) Pos. EQUILIBRIO: $\quad (w_0^2 = K/m)$

$$\ddot\theta - \sin\theta\left[(w^2+w_0^2)\cos\theta - w_0^2\right] = 0$$

Busco sol. estacionarias $\theta = cte \Rightarrow \dot\theta = \ddot\theta = 0$

$$\Rightarrow -\sin\theta\left[(w^2+w_0^2)\cos\theta - w_0^2\right] = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \to \boxed{\theta_1 = 0},\ \boxed{\theta_2 = \pi}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{w_0^2}{w_0^2+w^2} \to \boxed{\theta_3 = \pm \arccos\left(\frac{w_0^2}{w^2+w_0^2}\right)}$$

(θ_3 existe siempre pues $\left|\frac{w_0^2}{w^2+w_0^2}\right| < 1$)

ESTABILIDAD: Como la ec. movimiento es del tipo $\ddot\theta + f(\theta) = 0$

$\Rightarrow$ $f(\theta)$ ES LA DERIVADA DE CIERTO POTENCIAL EFECTIVO $F(\theta)$

$\Rightarrow$ CLASIFICO ESTUDIANDO EL SIGNO DE $F''(\theta) = f'(\theta)$ (Si quisiera hallar el potencial — QUE NO LO NECESITO — podría hacerlo preintegrando la ec. mov.

$$\frac{\dot\theta^2}{2} + U_{ef}(\theta) = cte$$)

$$f(\theta) = -\sin\theta\left[(w^2+w_0^2)\cos\theta - w_0^2\right] \Rightarrow f'(\theta) = (w^2+w_0^2)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + w_0^2\cos\theta$$

$\theta_1 = 0 \to f'(0) = -w^2 < 0$ si $w \neq 0 \Rightarrow$ INESTABLE

$\theta_2 = \pi \to f'(\pi) = -w^2 - 2w_0^2 < 0 \Rightarrow$ INESTABLE

$\theta_3 = \arccos\left(\frac{w_0^2}{w^2+w_0^2}\right)$ ESTABLE (TEO: NO PUEDE HABER 2 ESTABLES O INESTABLES CONSECUTIVOS)