Señales y Sistemas

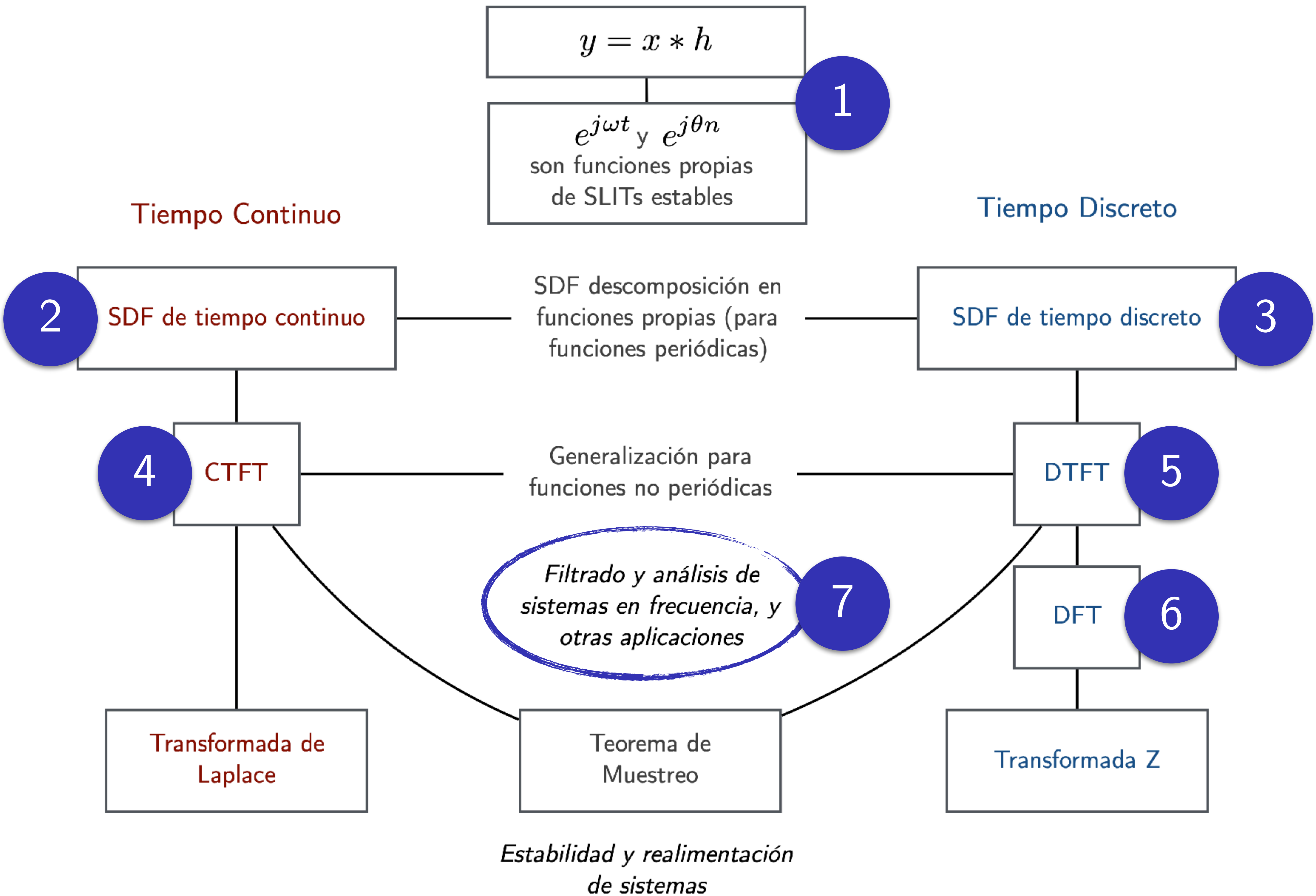
Análisis de señales y sistemas en tiempo y frecuencia

Instituto de Ingeniería Eléctrica

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Señales y sistemas

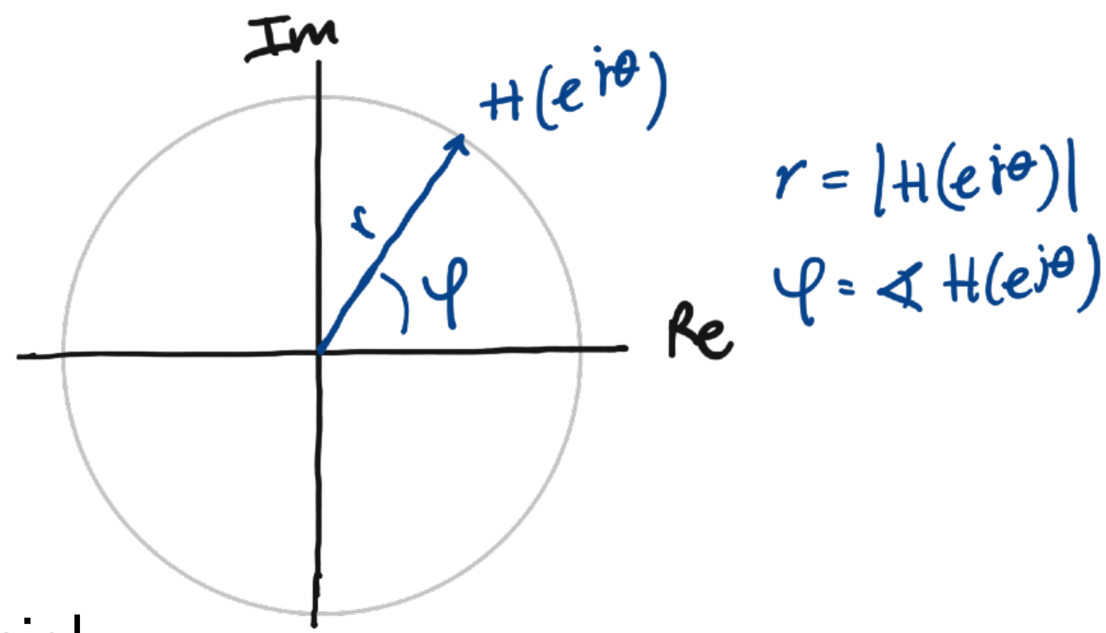


* tiempo o variable

Transformada de Fourier: módulo y fase

- La TF es un complejo: (dos componentes) módulo y fase son necesarios

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\sphericalangle H(j\omega)}$$



- Respuesta de un sistema a una exponencial

$$x(t) = e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} H \\ \text{SLIT} \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} = |H(j\omega)|e^{\sphericalangle H(j\omega)}e^{j\omega t} = |H(j\omega)|e^{(j\omega t + \sphericalangle H(j\omega))}$$

- Es la misma propiedad para variable discreta.

Transformada de Fourier: módulo y fase

IMAGEN 1

IMAGEN 2

IMAGEN 1 CON LA FASE DE LA IMAGEN 2

IMAGEN 2 CON LA FASE DE LA IMAGEN 1

Transformada de Fourier: fase lineal y no lineal

- Considerar

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

$$|H(j\omega)| = 1, \boxed{\sphericalangle H(j\omega) = -\omega t_0}$$

$$y(t) = x(t - t_0)$$

FASE LINEAL CON LA FRECUENCIA: EN EL BOSQUEJO ES UNA RECTA CON PENDIENTE NEGATIVA

NO DISTORSIONA LA SEÑAL

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta n_0}$$

$$|H(e^{j\theta})| = 1, \sphericalangle H(e^{j\theta}) = -\theta n_0$$

$$y[n] = x[n - n_0]$$

- No-distorsión:

$$y(t) = A\,x(t - t_0), \quad y[n] = A\,x[n - n_0]$$

  - fase lineal no distorsiona la señal (retardo uniforme en todas las frecuencias),
  - fase no-lineal sí distorsiona la señal.

Transformada de Fourier: retardo de grupo

- Retardo de grupo

$$\tau = -\frac{d}{d\omega}\{\sphericalangle H(j\omega)\}$$

  - Es el retardo efectivo medio esperado para las frecuencias en un entorno de ω.
  - Para fase lineal es constante t_0 (segundos) o n_0 (muestras).

Sistemas de primer orden de variable continua

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad \tau(j\omega)\,Y(j\omega) + Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1+\tau j\omega} = \boxed{\frac{1/\tau}{1/\tau + j\omega} = H(j\omega)}$$

$$\xrightarrow{TF^{-1}}$$

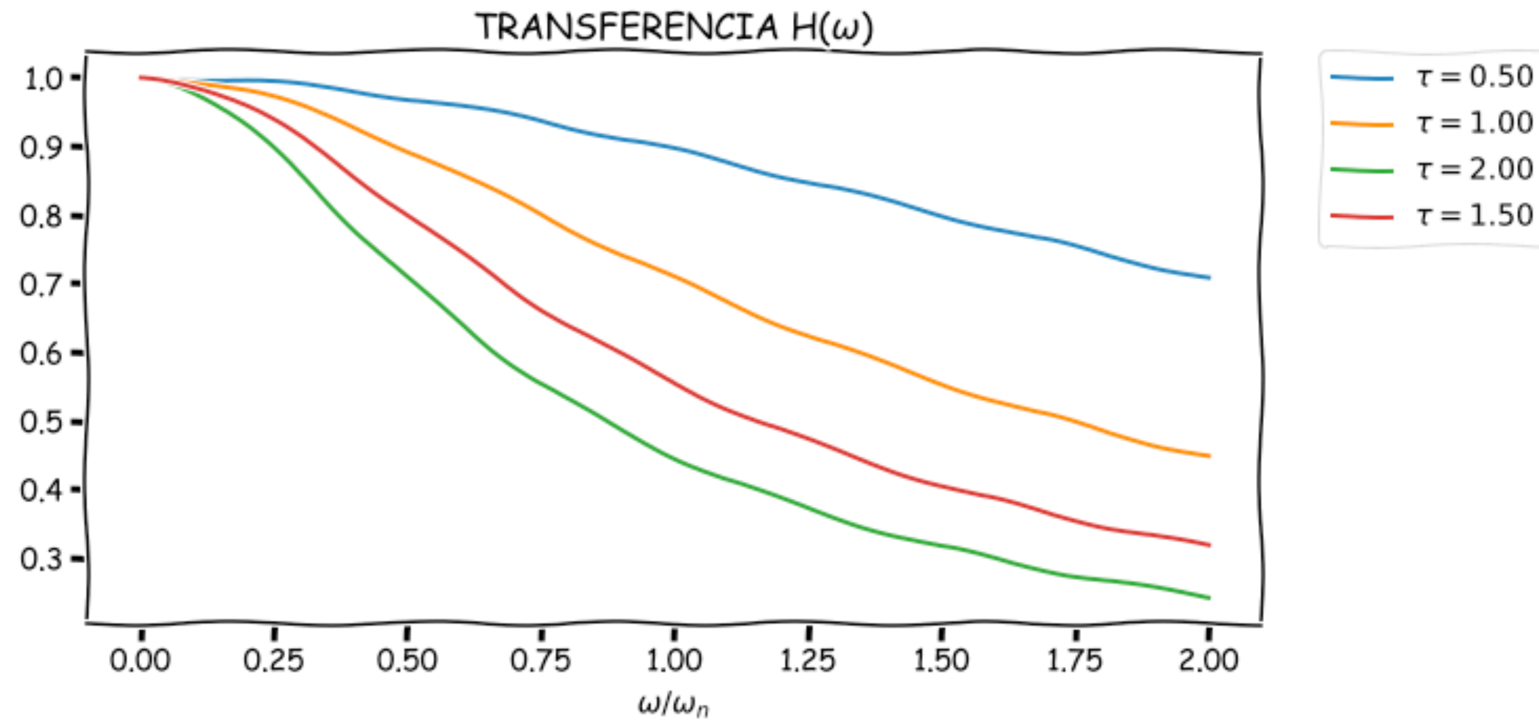
$$\boxed{h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)}$$

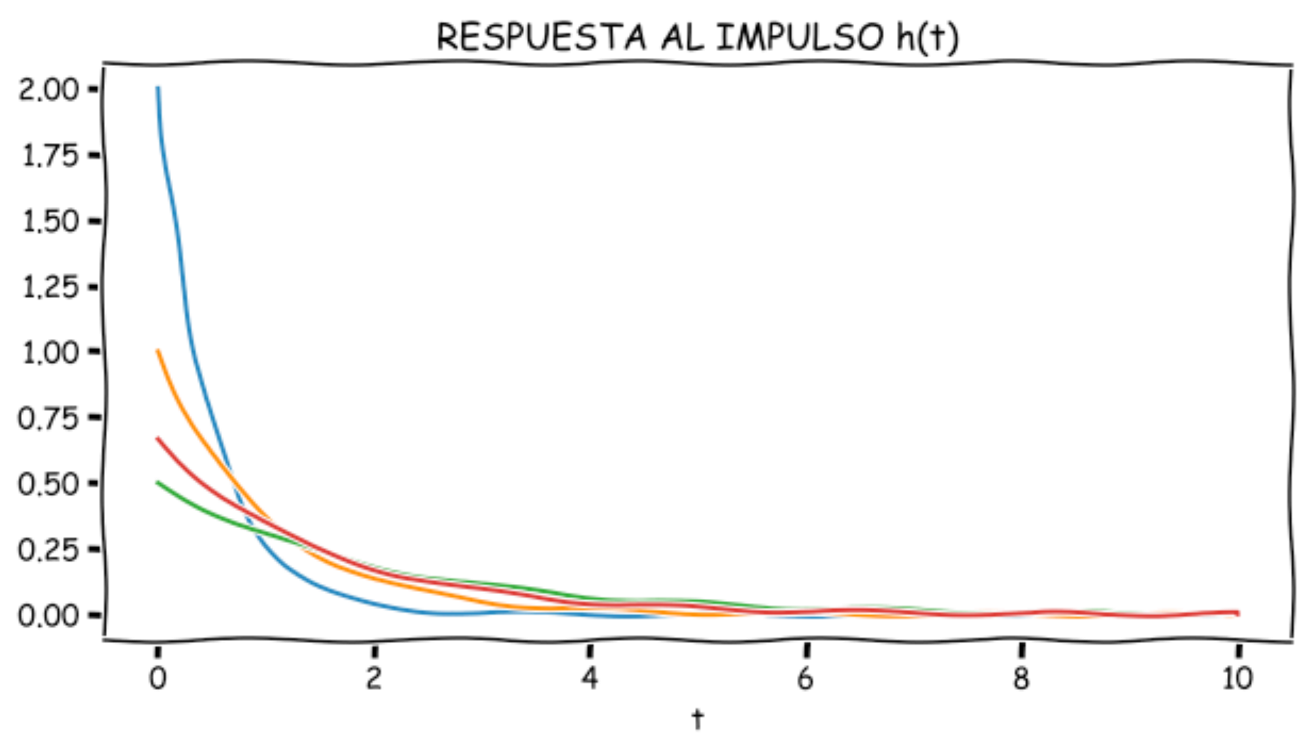
$$\boxed{\Rightarrow H \text{ ESTABLE sii } \tau > 0}$$

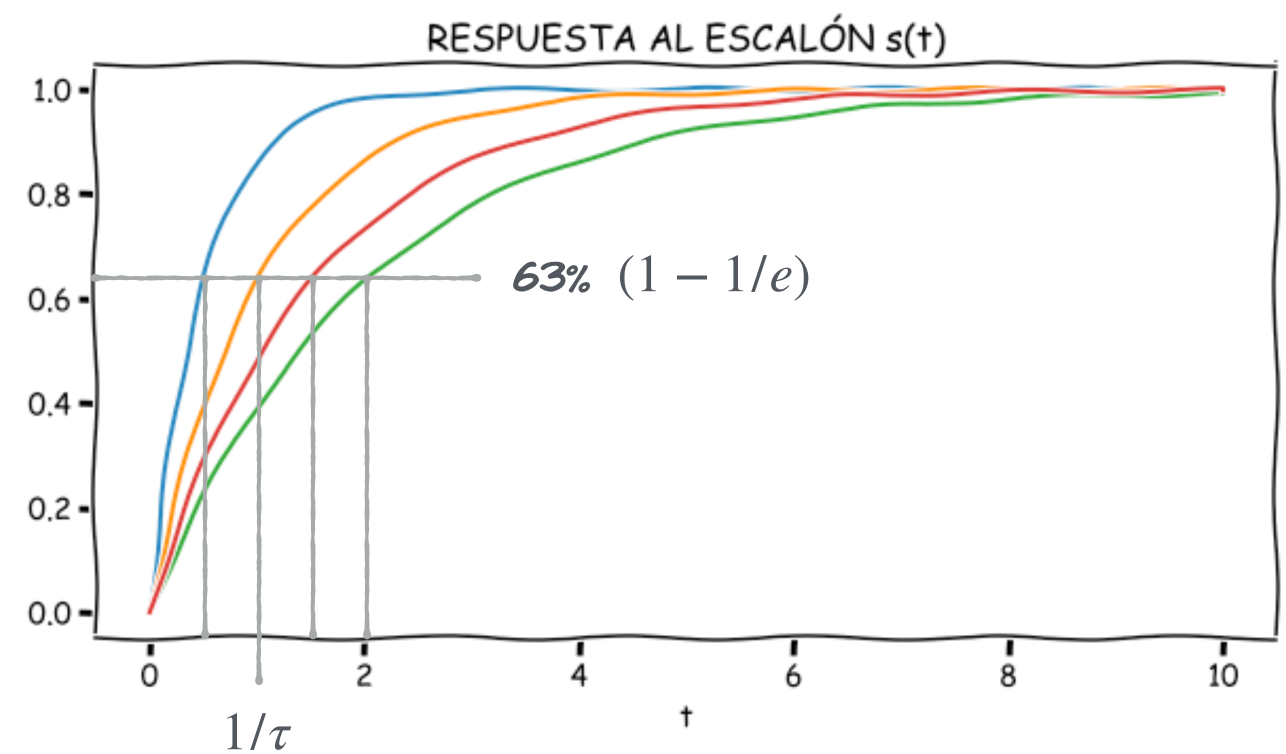
$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(v)\,dv = \frac{1}{\tau}\int_{0}^{t} e^{-v/\tau}\,dv$$

$$\boxed{s(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t)}$$

Sistemas de primer orden de variable continua



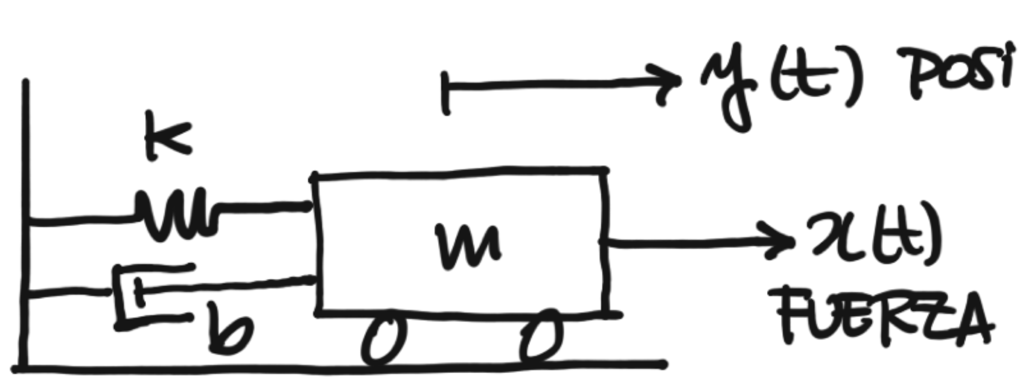




Sistemas de segundo orden de variable continua

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

EJEMPLO



k : RESORTE

b : AMORTIGUADOR

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = x(t) - k\,y(t) - b\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)y(t) = \frac{1}{m}x(t)$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}} \qquad 2\xi\omega_n = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{b}{2\sqrt{km}}}$$

Sistemas de segundo orden de variable continua

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

$\updownarrow$ TF

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 2\xi\omega_n (j\omega) Y(j\omega) + \omega_n^2 Y(j\omega) = \omega_n^2 X(j\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n (j\omega) + \omega_n^2}} \leftarrow$$

2 RAÍCES (POLOS) P1 Y P2

$$= \frac{\omega_n^2}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)} = \frac{A}{(j\omega - p_1)} + \frac{B}{(j\omega - p_2)}$$

$$p_{1,2} = -\frac{2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \boxed{-\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}$$

$$A = -B = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

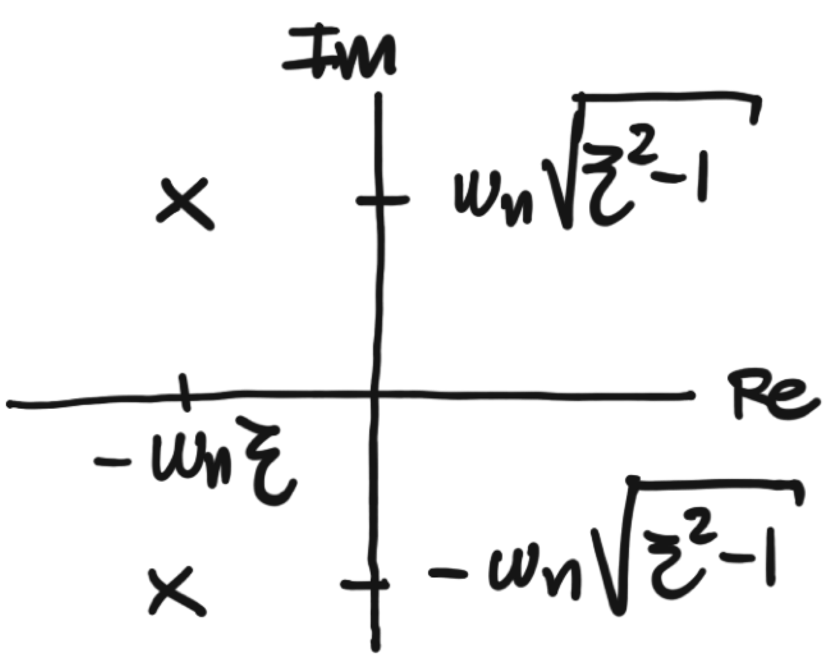
Sistemas de segundo orden de variable continua

$$\xi \neq 1 \qquad h(t) = A\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) u(t)$$

DOS POLOS REALES O COMPLEJOS CONJUGADOS

$$s(t) = \left(1 + A\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right) u(t)$$

CON $0 < \xi < 1 \quad p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm \sqrt{\underbrace{\xi^2 - 1}_{<0}}\right)$ SON COMPLEJAS CONJUGADAS



$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\omega_n \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right) u(t)$$

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Sistemas de segundo orden de variable continua

$\xi = 1 \qquad p_1 = p_2 = -\omega_n$ POLO REAL DOBLE

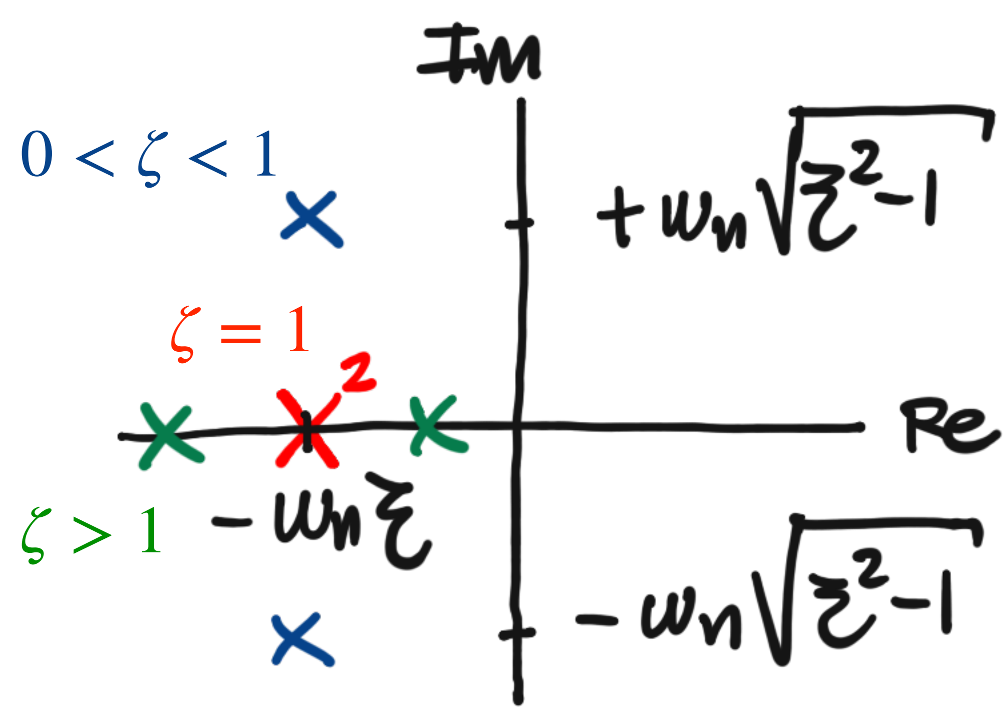
$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2} \overset{TF}{\longleftrightarrow} h(t) = \omega_n^2 \, t \, e^{-t\omega_n} u(t)$$

$$s(t) = \left(1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right) u(t)$$

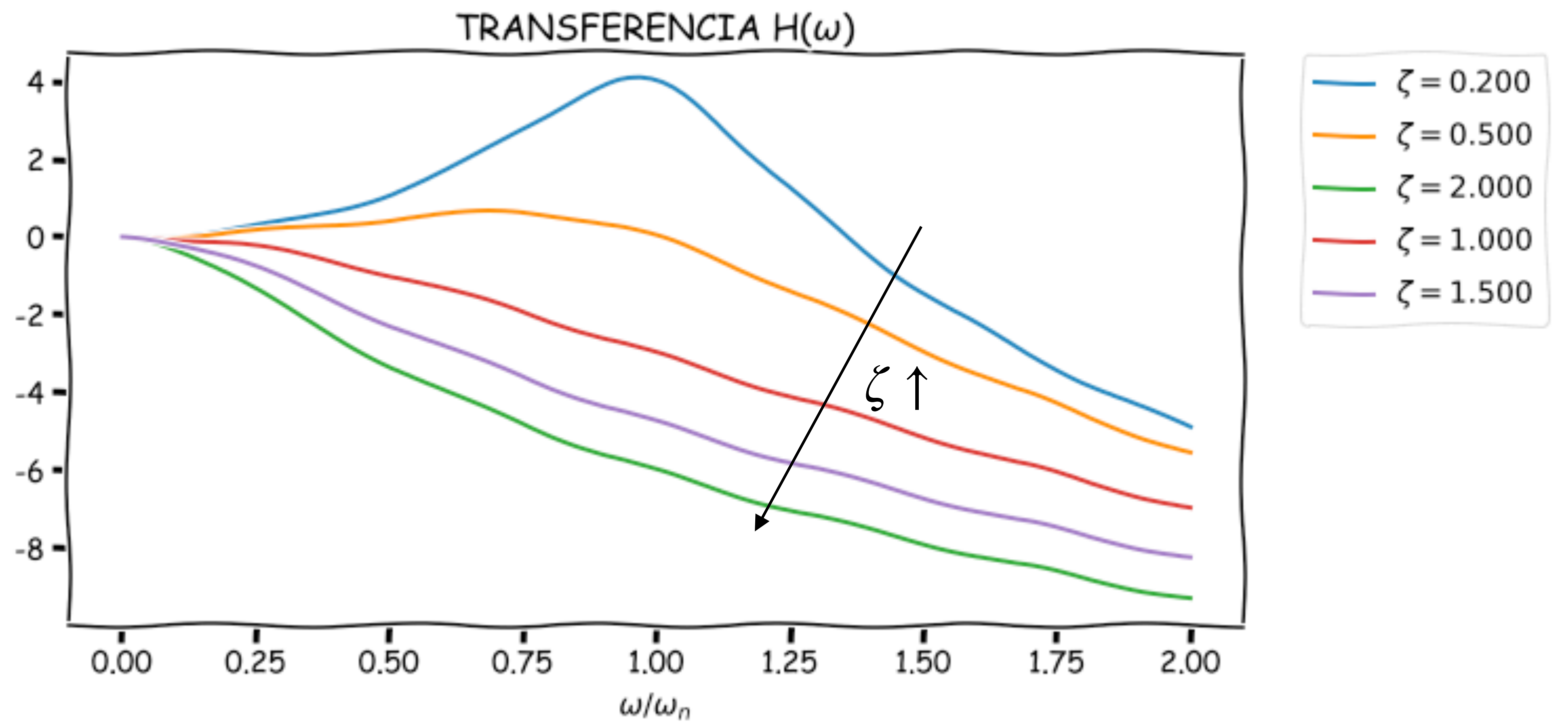
ω_n : FRECUENCIA NATURAL NO AMORTIGUADA

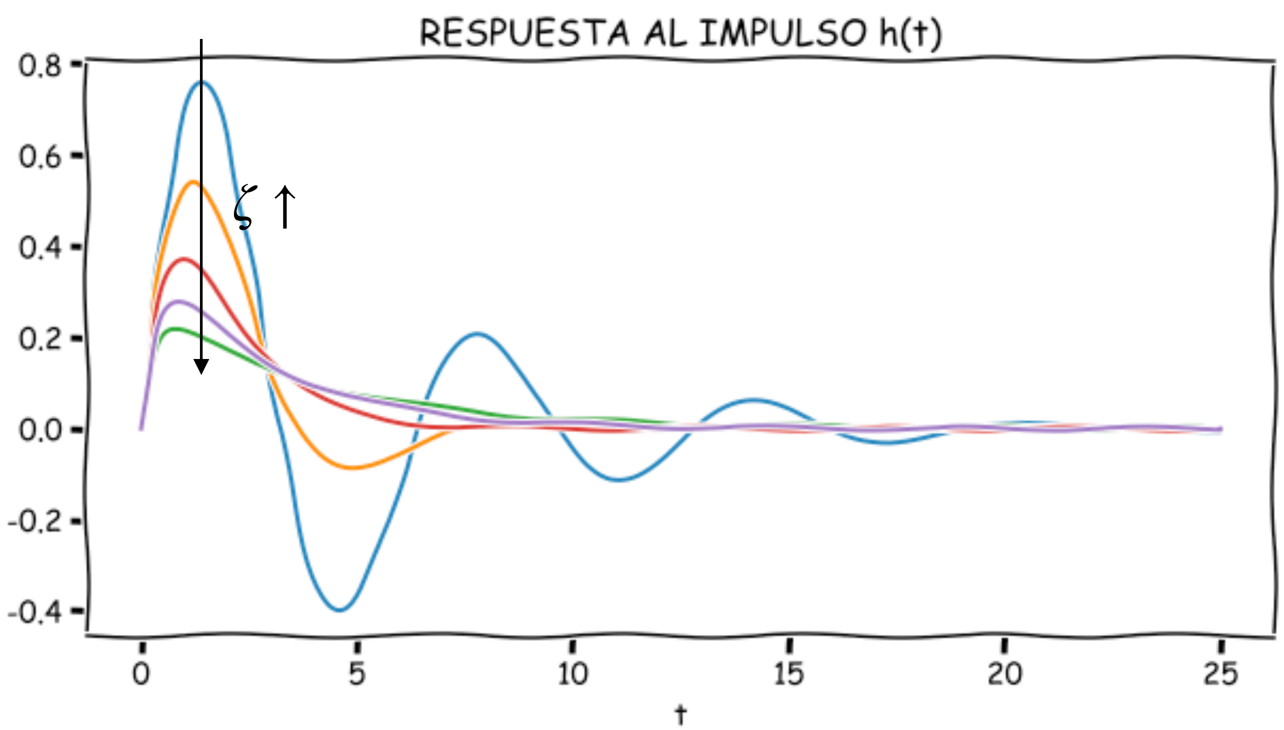
ξ : FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO

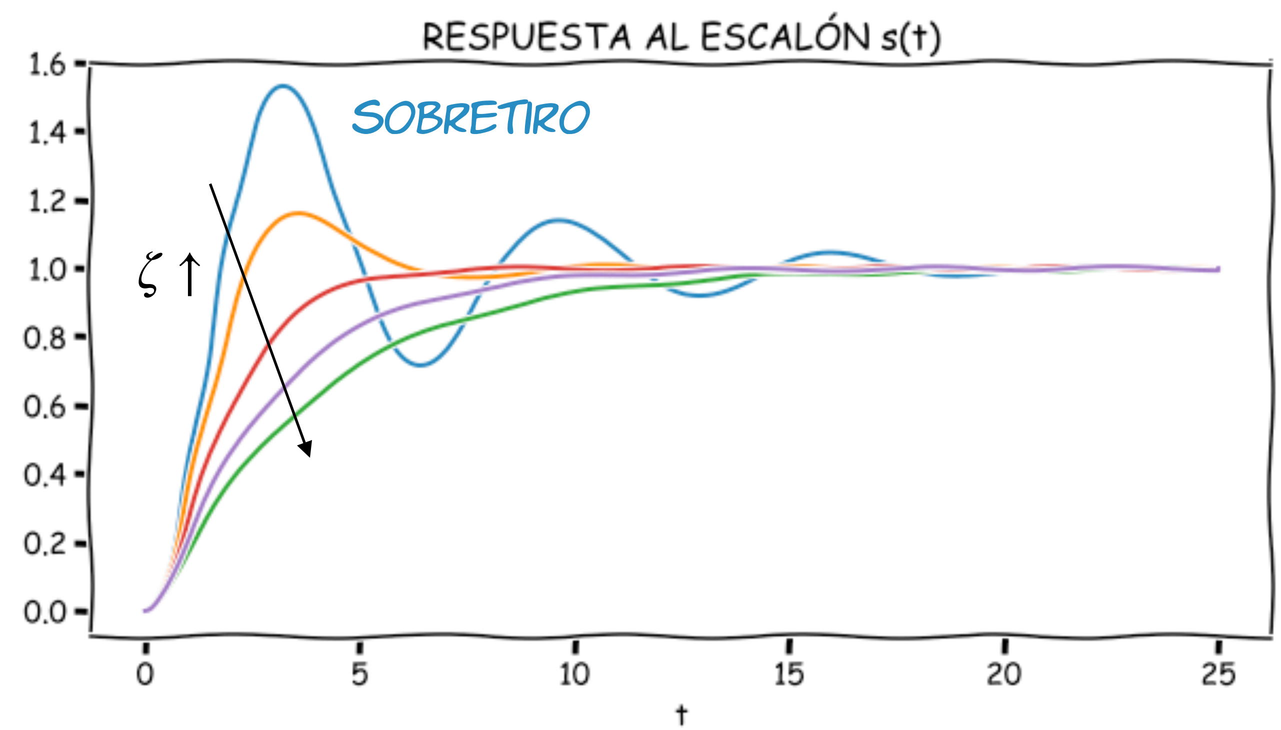
EL LUGAR DE LOS POLOS



Sistemas de segundo orden de variable continua







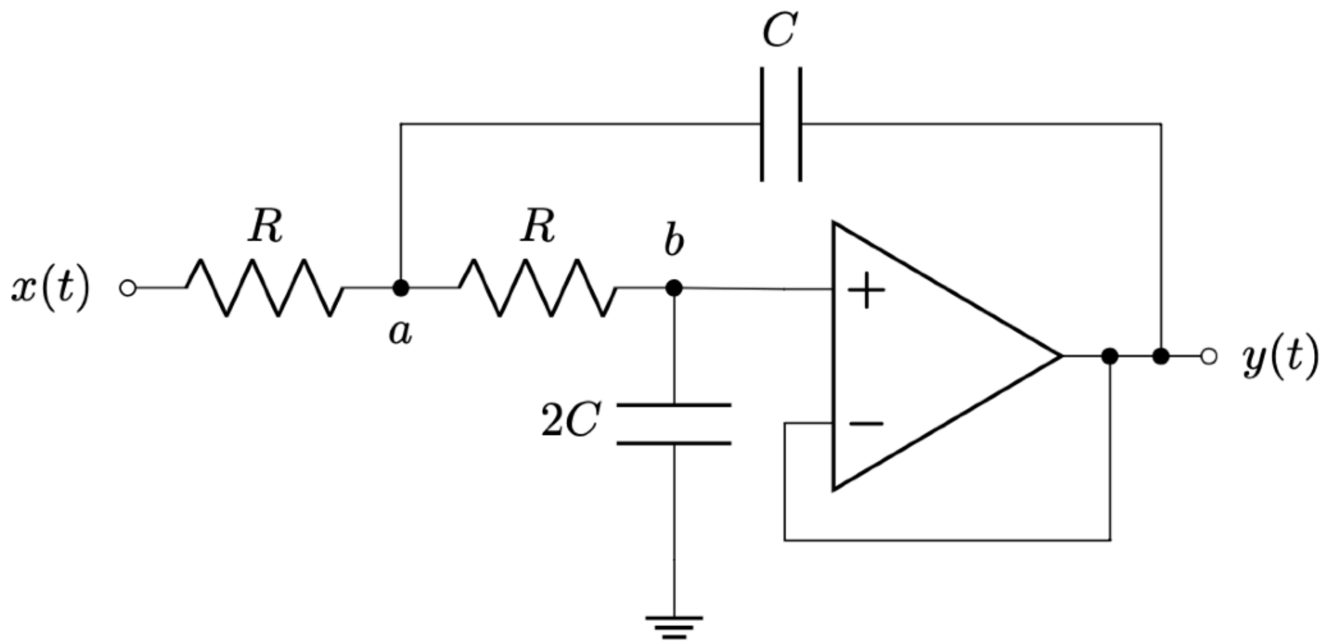
$\zeta = 0$: NO AMORTIGUADO

$\zeta = 1$: AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

$0 < \zeta < 1$: SUB-AMORTIGUADO (SOBRETIRO)

$\zeta > 1$: SOBRE-AMORTIGUADO (NO SOBRETIRO)

Ejercicio: Parcial 2021



Problema 3 [11 puntos]

Sea el siguiente sistema de segundo orden

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

(a) Determinar la condición que debe cumplir ζ para que la transferencia tenga dos polos reales. Justificar.

El circuito de la figura 1 tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{2R^2C^2s^2 + 4RCs + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

(b) Obtener el valor de ζ para el circuito de la figura 1, y comprobar que se cumple la condición de la parte a.

(c) Calcular y bosquejar la respuesta al impulso. En el bosquejo se deben indicar los valores de la respuesta en $t < 0$, en $t = 0$ y el valor de la asíntota para $t \to \infty$.

(d) A partir de la parte anterior, determinar si el circuito es estable.

(e) Obtener las salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$, e $y_3(t)$ (bosquejando $y_3(t)$) cuando la entradas son

$$x_1(t) = e^{jt/RC},\ x_2(t) = e^{-jt/RC},\ x_3(t) = \cos(t/RC).$$

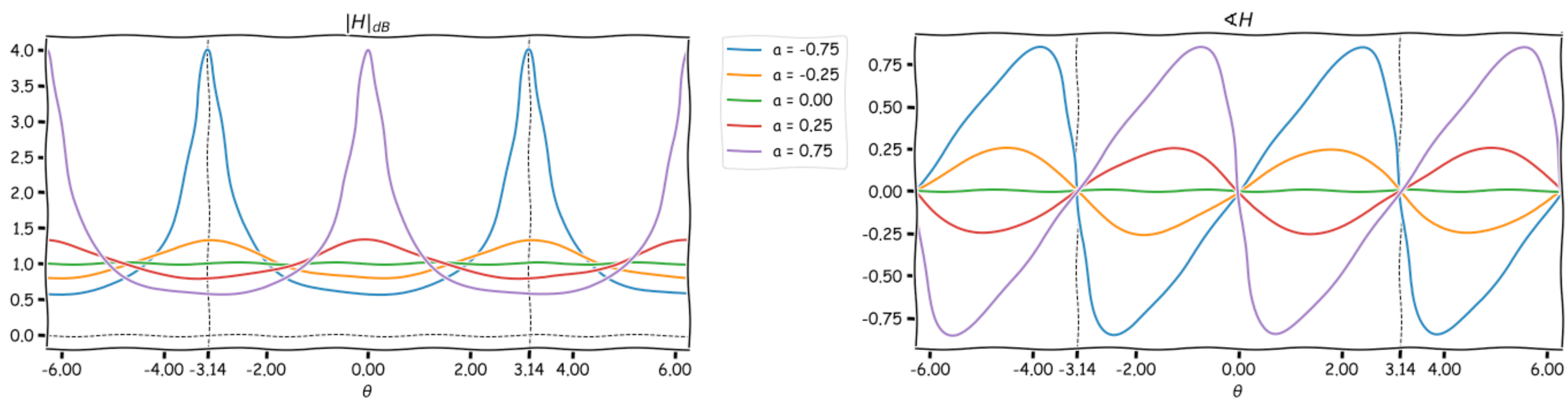
Sistemas de primer orden variable discreta

$$y[n] = a\,y[n-1] + x[n] \qquad |a| < 1$$

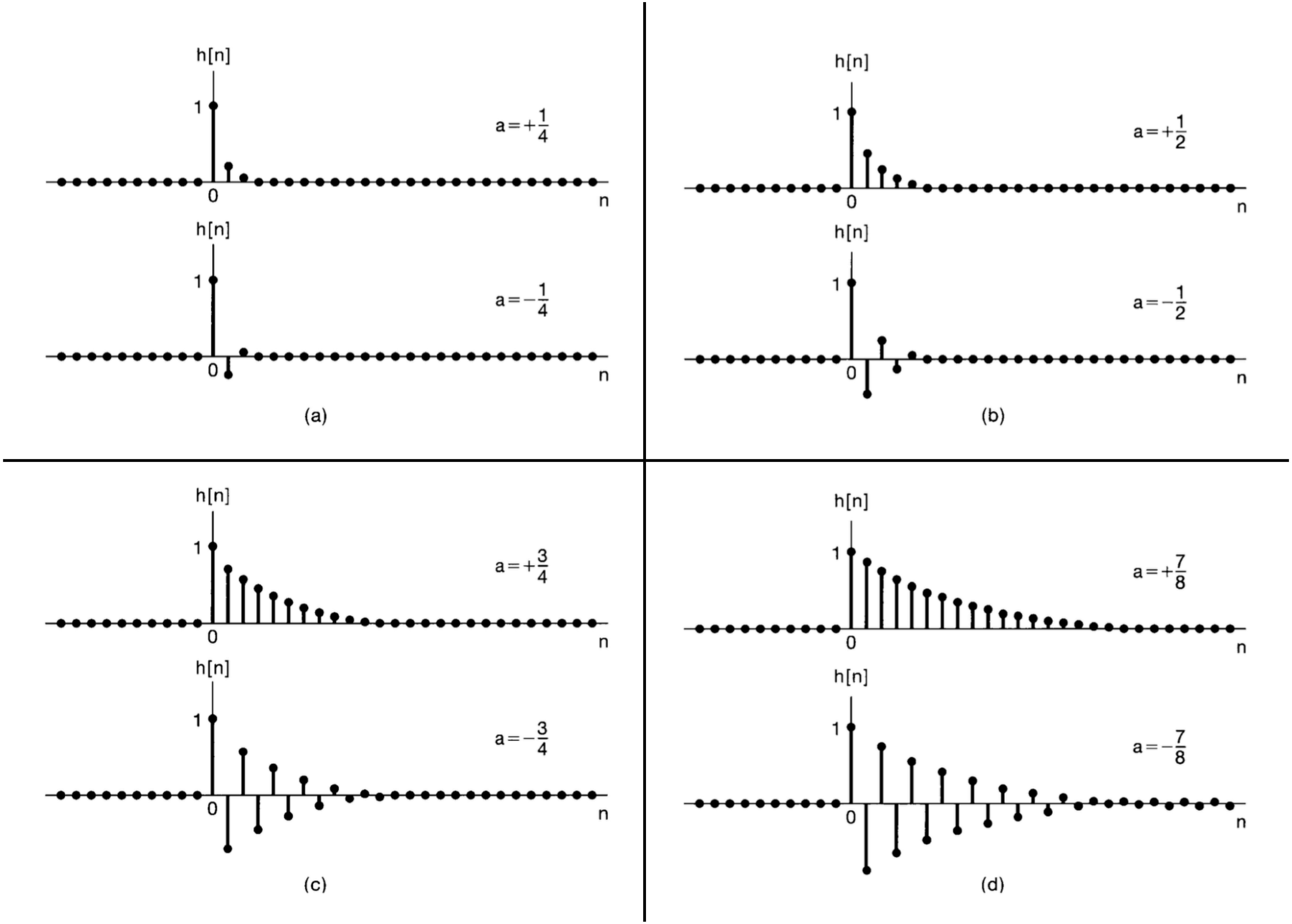
$$Y(e^{j\theta}) = a e^{j\theta}\, Y(e^{j\theta}) + X(e^{j\theta})$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}} \xleftrightarrow{TF} h[n] = a^n u[n]$$

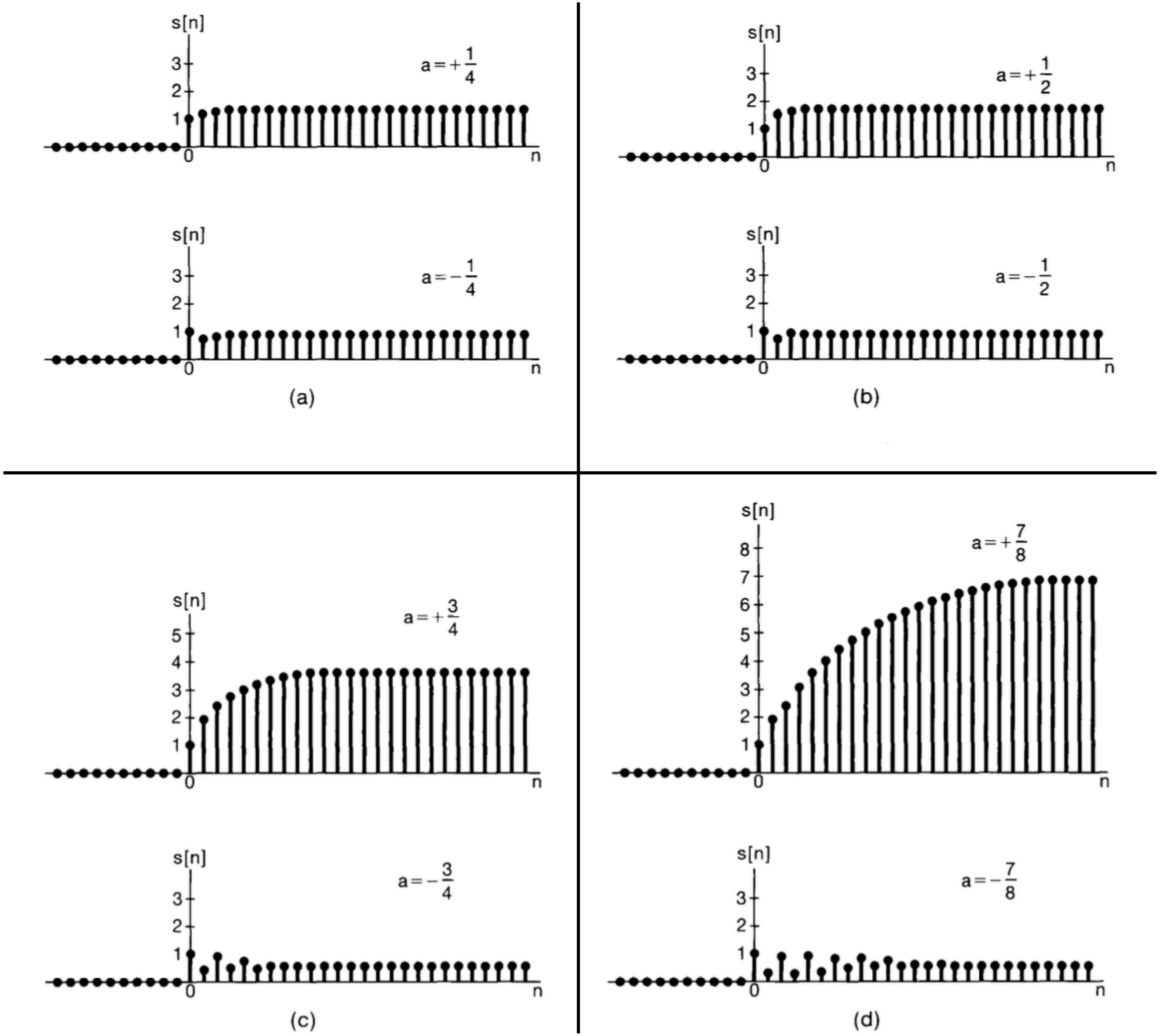
$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}\, u[n]$$



Sistemas de primer orden variable discreta



Sistemas de primer orden variable discreta



Sistemas de segundo orden variable discreta

$$y[n] - 2r\cos(\varphi)\, y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le r \le 1$

$$Y(e^{j\theta}) - 2r\cos(\varphi)\, e^{-j\theta} Y(e^{j\theta}) + r^2 e^{-2j\theta} Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\varphi\, e^{-j\theta} + r^2 e^{-2j\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(1-(re^{j\varphi})e^{-j\theta}\right)\left(1-(re^{-j\varphi})e^{-j\theta}\right)}$$

$\varphi \neq \{0, \pi\}$

RAICES COMPLEJAS DIFERENTES

$$= \frac{A}{\left(1-(re^{j\varphi})e^{-j\theta}\right)} + \frac{B}{\left(1-(re^{-j\varphi})e^{-j\theta}\right)}$$

$$A = \frac{e^{j\varphi}}{j\sin\varphi} = B^*$$

Sistemas de segundo orden variable discreta

$$h[n] = \left(A\,(r e^{j\varphi})^n + B\,(r e^{-j\varphi})^n \right) u[n]$$

$$= r^n \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}\, u[n]$$

$\varphi = \{0, \pi\}$ POLO DOBLE

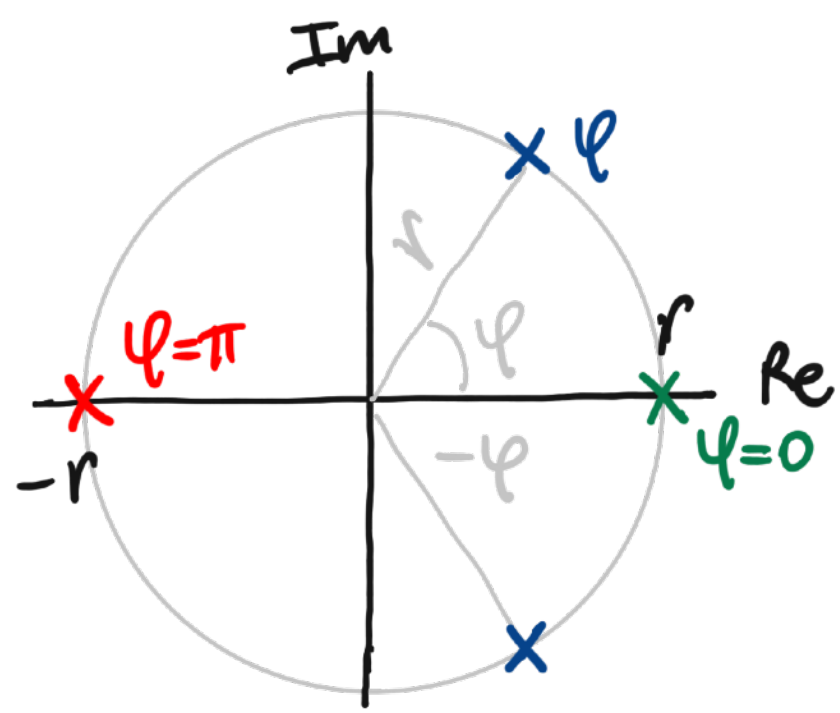
$\varphi = 0$: $\quad H(e^{j\theta}) = \dfrac{1}{(1 - r e^{-j\theta})^2}, \quad h[n] = (n+1)\, r^n u[n]$

$\varphi = \pi$: $\quad H(e^{j\theta}) = \dfrac{1}{(1 + r e^{-j\theta})^2}, \quad h[n] = (n+1)(-r)^n u[n]$

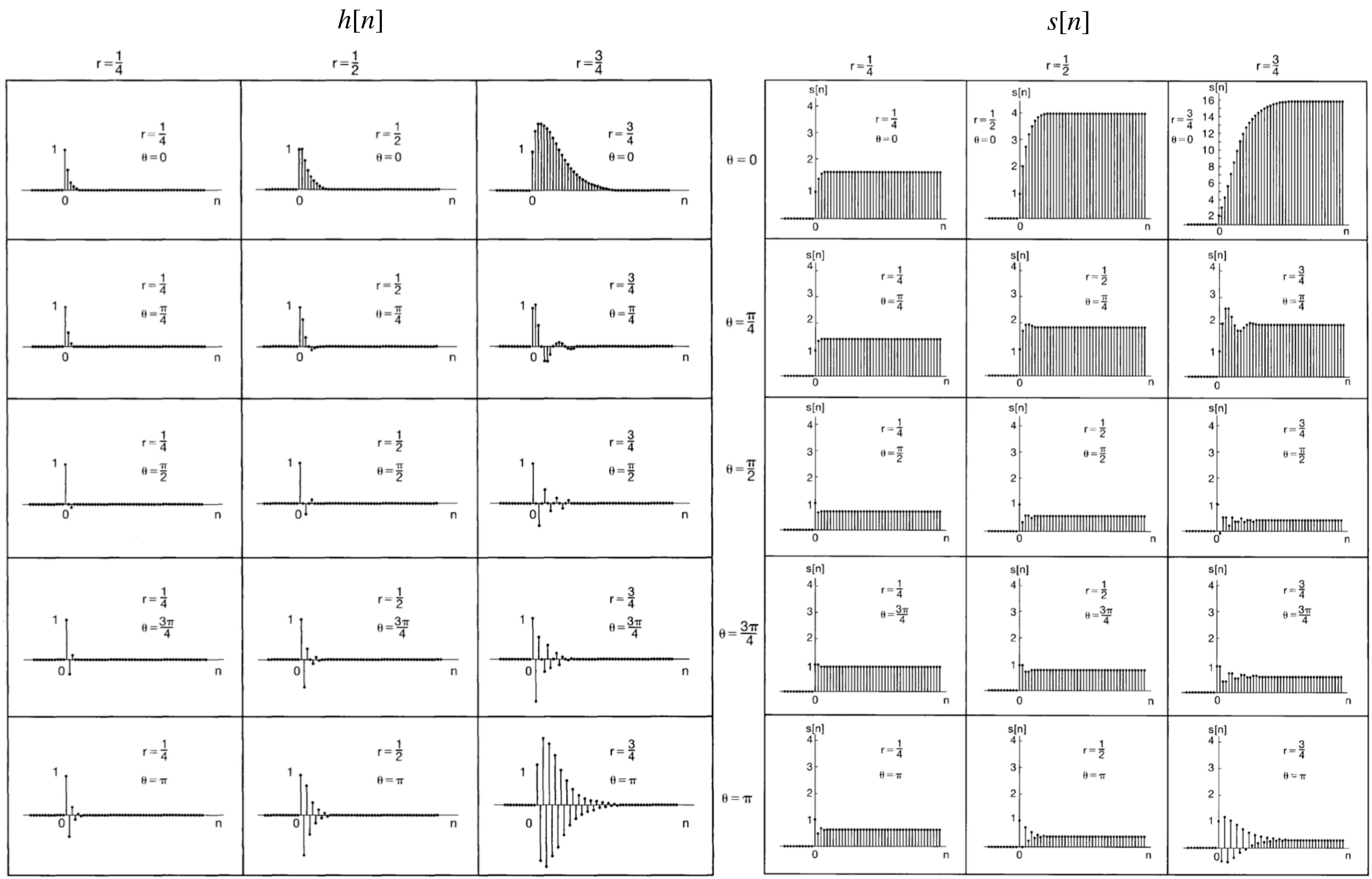
$s[n] = \cdots \quad$ (6.67) $\varphi \neq \{0, \pi\}$

(6.68) $\varphi = 0$

(6.69) $\varphi = \pi$



Sistemas de segundo orden variable discreta



Sistemas de segundo orden variable discreta