Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo Semestre 2015**

Parcial – Sábado 26 de septiembre de 2015

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es 3 horas.

(I) Verdadero Falso. Total: 8 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
F	V	F	V

Ejercicio 1: Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Ejercicio 2: Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\| \,.\, \|$ la norma inducida. Si v y w son vectores ortogonales entonces $\| v - w \| \geq \| v \|$.

Ejercicio 3: Considere $\mathcal{P}_2$, el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Para $p, q \in \mathcal{P}_2$ la función $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ es un producto interno.

Ejercicio 4: Sea V un espacio vectorial de dimensión 2, B una base de V y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que:

- Existe λ valor propio de T con $\mathrm{ma}(\lambda) = 2$.
- $\dim(N(T)) = \dim(Im(T))$.

Entonces $traza_B((T))_B = 0$.

(I) Múltiple opción. Total: 20 puntos

Puntajes: 4 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	C	A	B	A

Ejercicio 1

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que sus discos de Gershgorin son:
$C_1 : \{z \in \mathbb{C} : |z+5| \leq 1\}$, $C_2 : \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq 1\}$ y $C_3 : \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 2\}$.
Indique la opción correcta:

A) No existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.
B) A es diagonalizable y la suma de sus valores propios es -4.
C) A es diagonalizable y $det(A) = 0$.

Ejercicio 2

Considere una matriz compleja $M = ((m_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ y la función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ definida por $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_i m_{ij} \bar{w}_j$, $\forall v, w \in \mathbb{C}^3$.
Indique la opción correcta:

A) Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno entonces $m_{ij} = 0$ para todos $i \neq j$ y $m_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, 3$.
B) Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno entonces $m_{ij} = m_{ji}$ para todos $i, j = 1, 2, 3$ y $m_{11}m_{22}m_{33} > 0$.
C) Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno entonces $m_{ij} = \bar{m}_{ji}$ para todos $i, j = 1, 2, 3$ y $m_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Ejercicio 3

Considere la matriz real $A = \begin{pmatrix} b & 0 & b+3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

A) Existe un único valor de $b \in \mathbb{R}$ (que denotamos b_0) para el cual A es diagonalizable y $\forall b \neq b_0$ A es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

B) Para todo valor $b \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable y una forma diagonal es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

C) Para todo valor $b \in \mathbb{R}$ la matriz A no es diagonalizable y A es semejante a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4

Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y sea $T : V \to V$ un operador lineal con valores propios λ_1 y λ_2 tal que se cumple $V = S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2}$.
Indique la opción correcta:

A) χ_T no tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$ y $\exists\ i \in \{1, 2\}$ tal que $mg(\lambda_i) < ma(\lambda_i)$.
B) χ_T tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$ y $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$.
C) χ_T no tiene todas sus raices en $\mathbb{K}$ y $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para $i = 1, 2$.

Ejercicio 5

Considere el siguiente producto interno $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\langle (x,y,z),(u,v,w)\rangle = xu + 2yv + 2zw.$$

Sean $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ y $S^{\perp} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 :\ \langle (x,y,z),(u,v,w)\rangle = 0 \text{ para todo } (x,y,z) \in S\}$.
Indique la opción correcta:

A) $S^{\perp} = [(4,2,-2)]$.
B) $S^{\perp} = [(1,1,-1)]$.
C) $S^{\perp} = [(1,1,-1),(4,2,-2)]$.

(II) Desarrollo. Total: 12 puntos

Problema 1 (12 puntos)

a) **(4 puntos) Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** Sea V un espacio vectorial con producto interno. Pruebe que para todo par de vectores $u, v \in V$ se cumple:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \| u \| \| v \|,$$

donde $\| \,.\, \|$ es la norma inducida por el producto interno.

b) **(4 puntos)** Sea $V = C[a,b]$. Considere una función continua $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$, estrictamente positiva en (a,b). Pruebe que

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t)\,dt,$$

definida para $f, g \in C[a,b]$ es un producto interno.

c) **(4 puntos)** Use lo anterior para probar (**sin integrar por partes**) que:

$$\int_0^1 t^2 e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e-1}{2e}}.$$

Ayuda: $\int_0^1 t e^{-t^2} dt = \frac{e-1}{2e}$.

SOLUCIÓN PARTE DE DESARROLLO

Problema 1:

a) Si $v = 0$ la desigualdad obviamente se cumple (como igualdad). Si $v \neq 0$ entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$0 \leq \| u - \lambda v \|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle. \tag{1}$$

Tomando en particular $\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ resulta, usando propiedades del producto interno:

$$0 \leq \| u \|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\| v \|^2}$$

de donde se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Otra forma: El lado derecho de la desigualdad (1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$0 \leq \| u - \lambda v \|^2 = \| u \|^2 - 2Re(\lambda\langle v, u\rangle) + |\lambda|^2 \| v \|^2 .$$

Para $t \in \mathbb{R}$ tomamos $\lambda = t\frac{|\langle u,v\rangle|}{\langle u,v\rangle}$ (cuando $\langle u, v\rangle = 0$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz es trivial) y entonces debe cumplirse

$$0 \leq \| u \|^2 - 2t|\langle u, v\rangle| + t^2 \| v \|^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, para que el polinomio cuadrático en t del lado derecho sea no negativo debe ser:

$$4|\langle u, v\rangle|^2 - 4 \| u \|^2 \| v \|^2 \leq 0$$

de donde se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

b)
- $\langle f + h, g\rangle = \int_a^b \rho(t)(f(t) + h(t))g(t)dt = \int_a^b \rho(t)f(t)g(t)dt + \int_a^b \rho(t)h(t)g(t)dt = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle$.
- $\langle \alpha f, g\rangle = \int_a^b \rho(t)(\alpha f(t))g(t)dt = \alpha \int_a^b \rho(t)f(t)g(t)dt = \alpha\langle f, g\rangle$.
- Claramente $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ por ser funciones reales.
- $\langle f, f\rangle = \int_a^b \rho(t)f(t)^2 dt \geq 0$. Además, si $\int_a^b \rho(t)f(t)^2 dt = 0$ necesariamente $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$ por un argumento de continuidad (si $f(t_o) \neq 0$ para algún $t_o \in [a, b]$ entonces $\rho(t)f(t)^2 > 0$ en un entorno de t_o y la integral es estrictamente positiva).

c) Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto interno de la parte b) con $[a, b] = [0, 1]$ y $\rho(t) = t$, $f(t) = t$ y $g(t) = e^{-t^2/2}$ resulta:

$$|\langle f, g\rangle| = \int_0^1 t^2 e^{-t^2/2} dt \leq \| f \| \| g \| = \sqrt{\int_0^1 t.t^2 dt}\sqrt{\int_0^1 te^{-t^2} dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e-1}{2e}}.$$