Segundo parcial. Múltiple opción ejercicio 6

Buscamos saber si la matriz asociada en base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ a una simetría axial T cuyo eje es $[(1,0,2)]$ induce una forma cuadrática, y en caso afirmativo clasificarla.

Presentamos dos opciones de resolución.

(1) Opción deductiva.

Observamos en primer lugar que $(0,1,0) \perp (1,0,2)$, que $(-2,0,1) \perp (1,0,2)$ y que $(0,1,0) \perp (-2,0,1)$, por lo tanto $[(1,0,2)]^{\perp} = [(0,1,0),(-2,0,1)]$ y en consecuencia $\mathbb{B} = \{(1,0,2),(0,1,0),(-2,0,1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Inmediatamente determinamos ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Normalizando los vectores de la base $\mathbb{B}$ obtenemos una BON para la cual la matriz asociada a T en esta BON es simétrica pues es igual a la matriz asociada en base $\mathbb{B}$. Por el Teorema espectral para operadores autoadjuntos se deduce que T es un operador autoadjunto.

Luego, como la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es una BON y T es autoadjunto, entonces la matriz asociada que buscamos encontrar será necesariamente simétrica. Luego, define una forma cuadrática, y como conocemos los valores propios se deduce que la forma cuadrática inducida es indefinida.□

(2) Opción constructiva.

Observamos en primer lugar que $(0,1,0) \perp (1,0,2)$, que $(-2,0,1) \perp (1,0,2)$ y que $(0,1,0) \perp (-2,0,1)$, por lo tanto $[(1,0,2)]^{\perp} = [(0,1,0),(-2,0,1)]$ y en consecuencia $\mathbb{B} = \{(1,0,2),(0,1,0),(-2,0,1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Inmediatamente determinamos ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Como ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathbb{B}} \cdot {}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} \cdot {}_{\mathbb{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$, alcanza con calcular las matrices de cambio de base y resolver el producto matricial para encontrar lo que se busca.

Es inmediato que ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

En consecuencia, ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

En definitiva, ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ es una matriz simétrica y por lo tanto define una forma cuadrática. Como tiene valores propios positivos y también tiene valores propios negativos, entonces la forma cuadrática inducida por la matriz ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$ es indefinida.□

Juan C. Morelli - I.M.E.R.L.