Universidad de la República	**Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL	**Segundo Semestre 2019**

Sábado 16 de noviembre de 2019

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 60 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.
- **Todos los espacios vectoriales considerados en este parcial tienen dimensión finita.**
- **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.**

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{M}_{m\times n}$ es el espacio de las matrices reales de tamaño $m \times n$.
- $\mathcal{P}_n$ es el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que n.

(I) Verdadero Falso. Total: 20 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**

Ejercicio 1:
Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interno habitual. Sea $T : V \to V$ un operador diagonalizable. Existe una base **ortonormal** de V formada por vectores propios de T.

Ejercicio 2:
Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Considere dos funcionales lineales $S, T : V \to \mathbb{K}$. Si $w_1 \in V$ es el representante de Riesz de T y $w_2 \in V$ es el representante de Riesz de S, entonces el representante de Riesz del funcional $T + S$ es $w_1 + w_2$.

Ejercicio 3:
Sean V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $S \subset V$ un subespacio vectorial ($S \neq \{0\}$, $S \neq V$), y $P_S : V \to V$ la proyección ortogonal sobre S. Entonces P_S es un operador **ortogonal**.

Ejercicio 4:
Considere el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_2$ con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Sea $T : V \to V$ el operador derivada; esto es: $T(p) = p'$. Entonces T es un operador autoadjunto.

Ejercicio 5:
Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si S_λ y S_μ son subespacios propios correspondientes a dos valores propios distintos de un operador **autoadjunto** $T : V \to V$, entonces $S_\lambda \perp S_\mu$.

Ejercicio 6:
Sean V un espacio vectorial con producto interno, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V, y $T : V \to V$ un operador lineal tal que $\| T(v_i) \| = \| v_i \|$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces T es una isometría.

Ejercicio 7:
Toda isometría lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ es invertible.

Ejercicio 8:
Sean V un espacio vectorial real con producto interno, $dim(V) = n$, y $T : V \to V$ un operador lineal. Suponga que existe una base ortonormal B en la cual la matriz asociada $A =_B (T)_B$ es antisimétrica (esto es: $A^t = -A$). Entonces T es autoadjunto.

Ejercicio 9:
Sean $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno habitual y C la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Considere un operador lineal $T : V \to V$ tal que su matriz asociada es ${}_C(T)_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces T preserva el producto interno.

Ejercicio 10:
Sean V un espacio vectorial real con producto interno y $T : V \to V$ un operador ortogonal. Si $S \subset V$ es un subespacio invariante bajo T entonces $S^\perp$ también es un subespacio invariante bajo T.

(II) Múltiple opción. Total: 40 puntos
Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
D	**B**	**B**	**A**	**C**

Ejercicio 1

Considere los siguientes pares de datos (x, y): $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$. Se desea ajustar esos datos a una función de la forma $y = \alpha x + \beta$, aplicando el método de mínimos cuadrados.
Los valores para α y β obtenidos por ese método son:

A) $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = -\frac{7}{6}$.

B) $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{3}$.

C) $\alpha = \frac{7}{6}$ y $\beta = -\frac{1}{3}$.

D) $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{7}{6}$.

Ejercicio 2

Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interno habitual, B una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal con matriz asociada

$$A =_B (T)_B = \begin{pmatrix} 4\cos\theta & -4\sin\theta \\ 4\sin\theta & 4\cos\theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$.
Indique la opción correcta:

A) Para todo valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

B) Hay exactamente dos valores de $\theta \in [0, 2\pi)$ para los cuales existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

C) Hay exactamente un único valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ para el cual existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

D) Para ningún valor de $\theta \in [0, 2\pi)$ existen matrices reales $P, D \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, P ortogonal y D diagonal, tales que $A = PDP^t$.

Ejercicio 3

Considere el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = traza(B^t A)$. Considere además el funcional lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

y la transformación lineal $S : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por:

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

El representante de Riesz del funcional $T \circ S : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4

Considere $V = \mathcal{P}_1$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 1, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, y $W = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual.
Sea $T : V \to W$ la transformación lineal definida por $T(1) = (1, 1, 0)$ y $T(t) = (1, 0, 1)$. Entonces la transformación adjunta $T^* : W \to V$ es:

A) $T^*(x, y, z) = 6(x - y + 2z)t - (2x - 4y + 6z), \quad t \in \mathbb{R}$.
B) $T^*(x, y, z) = (x + z)t + (x + y), \quad t \in \mathbb{R}$.
C) $T^*(x, y, z) = 3(x - y + 2z)t + (x + y), \quad t \in \mathbb{R}$.
D) $T^*(x, y, z) = (x + z)t - (2x - 3y + z), \quad t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5

Considere la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se usa la descomposición en valores singulares para escribir $A = USV^t$, con U y V matrices **ortogonales** y S matriz **diagonal** (cuyos valores en la diagonal están ordenados de mayor a menor).
Entonces:

A) $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B) $S = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C) $S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D) $S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.