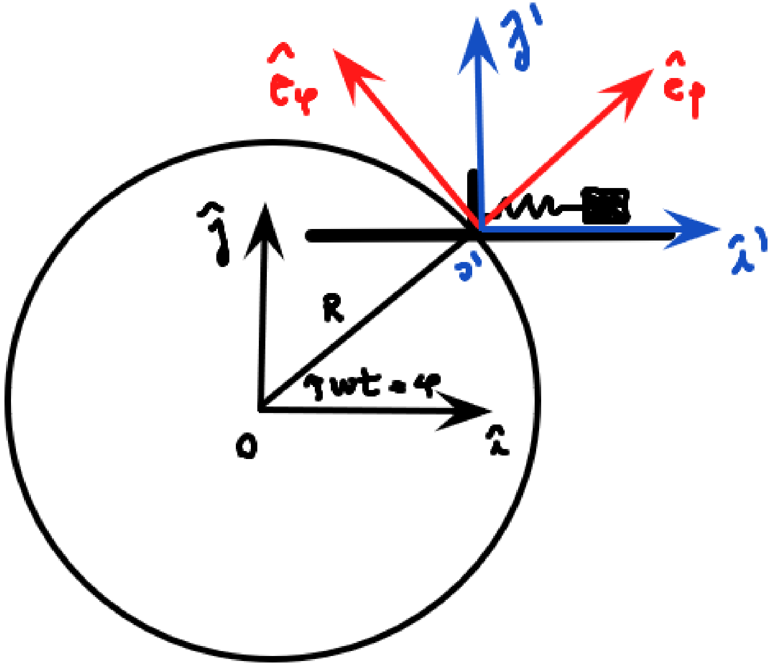
CLASE 4: DINÁMICA DE LA PARTÍCULA (II)

OBJETIVOS:

- → Aprender a resolver problemas de dinámica tanto trabajando desde un sistema inercial como desde uno no inercial, agregando fuerzas ficticias. Comprender la equivalencia entre ambas perspectivas
- → Aprender a trabajar correctamente con las fuerzas de fricción estática y dinámica
- → Repasar (o aprender) nuevas técnicas para resolver la ecuación de movimiento

Lo haremos mediante el estudio de un ejemplo concreto...

EJEMPLO (EJ 14 + Resorte)



→ Plataforma horizontal móvil cuyo centro o' se mueve sobre $\mathcal{C}_{O,R}$ / $\varphi = \omega t$

→ En $t=0$ se coloca m en $x=L$ en reposo relativo respecto a la plataforma

→ Resorte tiene constante elástica k y $l_0 = 0$

→ Vínculo rugoso de coeficientes f_D y f_E

→ Supondremos que $KL > mR\omega^2$, $\omega^2 \neq K/m$

Queremos:

i) Hallar la aceleración de m por 2 caminos

ii) Condición que deben satisfacer los datos del problema para que NO DESLICE en un entorno de $t=0$

iii) Si no se cumple lo anterior

a) Condición de No desprendimiento

b) Si no desprende, hallar la Ecuación de movimiento

iv) Asumiendo que no hay fricción, obtenga la ley horaria hasta que se detiene por primera vez

i) Sean los sistemas $\begin{cases} S'\{o',\hat{\imath}',\hat{\jmath}',\hat{k}'\} \to \boxed{\vec{\omega}_{S'/S}=0} \\ S''\{o',\hat{e}_\rho,\hat{e}_\varphi,\hat{k}\} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{S''/S}=\dot{\varphi}\hat{k}=\omega\hat{k}} \end{cases}$

Nótese que S' NO ROTA: la orientación de $\hat{\imath}'$ es siempre horizontal y la de $\hat{\jmath}'$ siempre vertical $\Rightarrow \vec{\omega}_{S'/S}=0$
(De hecho, son $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$...)

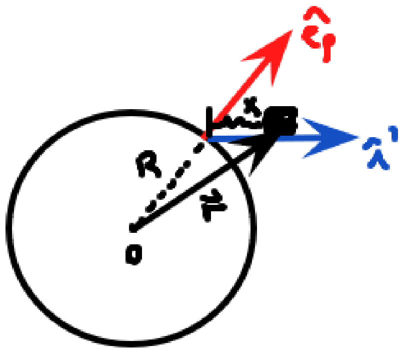
Es conveniente definir los sistemas de referencia que utilizaremos e identificar sus velocidades angulares, que serán necesarias para hallar las DERIVADAS DE LOS VERSORES:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\imath}}' = \vec{\omega}_{S'/S}\times\hat{\imath}' = 0 \\ \dot{\hat{\jmath}}' = \vec{\omega}_{S'/S}\times\hat{\jmath}' = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{\hat{e}}_\rho = \vec{\omega}_{S''/S}\times\hat{e}_\rho = \omega\hat{k}\times\hat{e}_\rho = \omega\hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\omega}_{S''/S}\times\hat{e}_\varphi = \omega\hat{k}\times\hat{e}_\varphi = -\omega\hat{e}_\rho \end{cases}$$

FORMA 1

$\Rightarrow$ Ahora sí: $\underbrace{\vec{r} = R\hat{e}_\rho + x\hat{\imath}'}$ $\to \vec{v} = R\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{x}\hat{\imath}' + x\dot{\hat{\imath}}' \Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega\hat{e}_\varphi + \dot{x}\hat{\imath}'}$

$\vec{a} = R\omega\dot{\hat{e}}_\varphi + \ddot{x}\hat{\imath}' + \dot{x}\dot{\hat{\imath}}' \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2\hat{e}_\rho + \ddot{x}\hat{\imath}'}$



(Por ahora puede quedar expresada mediante versores de $\neq$ base. Cuando apliquemos la 2da ley de Newton elegiremos la base más conveniente tomando en cuenta las fuerzas que actúan sobre m)

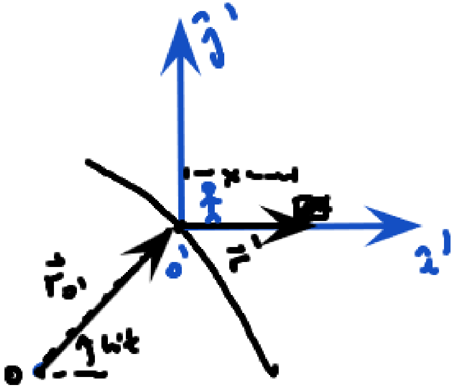
Forma 2: Coriolis

NOTA: Para hallar la aceleración absoluta usando el Teorema de Coriolis **DEBEMOS ELEGIR UN (1) SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL AUXILIAR S'** y calcular

$$\begin{cases} \vec{a}' \rightarrow \text{respecto al } S' \text{ elegido, que debe estar DEBIDAMENTE ESPECIFICADO} \\ \vec{a}_T = \vec{a}_{o'} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}' + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}') \\ \vec{a}_c = 2\vec{w} \times \vec{v}' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tomando $S'\{o', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$:

(Sug: hacerlo también tomando S'' como sist. auxiliar)



$$\vec{r}' = x\hat{i}' \Rightarrow \vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \frac{d'(x\hat{i}')}{dt} = \dot{x}\hat{i}' \Rightarrow \boxed{\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \ddot{x}\hat{i}'}$$

$$\vec{r}_{o'} = R\hat{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}_{o'} = R\dot{\hat{e}}_\rho = R\omega\hat{e}_\varphi \Rightarrow \vec{a}_{o'} = R\omega\dot{\hat{e}}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{o'} = -R\omega^2\hat{e}_\rho}$$

$$\vec{w} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{w}} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{w}} \times \vec{r}' = 0}$$

$$\Rightarrow \vec{w} \times \vec{r}' = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}') = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\vec{w} \times \vec{v}' = 0} = \vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{a}_T = -R\omega^2 e_\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\hat{i}' - R\omega^2\hat{e}_\rho}$$ ✓

ii) Condición para que No deslice en un entorno de $t=0$

→ Queremos que exista un intervalo (posiblemente pequeño) / M PERMANECE EN REPOSO RELATIVO A LA PLATAFORMA

⇒ $\exists$ (al menos) un tiempo dt tal que $\underbrace{x}_{\text{coordenada relativa}} = cte = x(0) = L$ ⇒ Eso implica que
- $\dot{x}(0) = 0$ (dado en la letra)
- $\ddot{x}(0) = 0$ (DEBO IMPONERLO)

¿Por qué? $x(dt) \overset{\text{Taylor}}{\simeq} \underbrace{x(0)}_{=L} + \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} dt + \ddot{x}(0)\frac{(dt)^2}{2} = L + \ddot{x}(0)\frac{(dt)^2}{2} \neq L$ si $\ddot{x}(0) \neq 0$

· ¿Implica eso que la partícula no tiene aceleración en $t=0$? No!

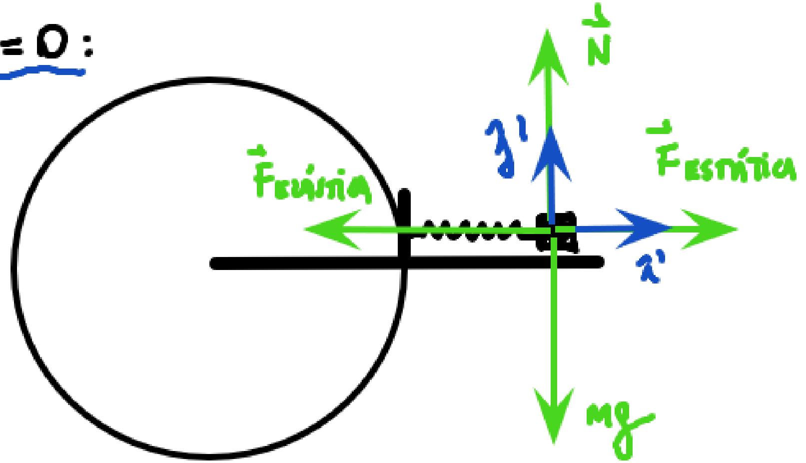
$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_\rho + \ddot{x}\,\hat{\imath}$

En $t=0$ ⇒ $\left.\begin{array}{l}\hat{e}_\rho = \hat{\imath} \\ \ddot{x}(0) = 0 \text{ (No desliza)}\end{array}\right\}$ ⇒ $\boxed{\vec{a}(t=0) = -R\omega^2\,\hat{\imath}}$ Tiene aceleración de transporte debido al movimiento de S'

⇒ Si no desliza ⇒ LA FRICCIÓN ES ESTÁTICA : $\boxed{|\vec{F}_E| \leq |\vec{F}_{E\,max}| = f_e|\vec{N}|}$ CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO (No olvidarse de los módulos)

máximo valor que puede tomar la fuerza de rozamiento estática

EN $t=0$:



$$\vec{F}_N = \vec{P} + \vec{F}_{elástica} + \vec{N} + \vec{F}_{estática}$$

$$= -mg\hat{j}' - KL\hat{i}' + N\hat{j}' + \underbrace{F_E\hat{i}'}_{\text{a priori no conocemos su sentido}}$$

F_E → número real (puede ser negativo)

$\begin{cases} \text{Si } F_E > 0 \Rightarrow \longrightarrow \vec{F}_{estática} \\ \text{Si } F_E < 0 \Rightarrow \longleftarrow \vec{F}_{estática} \end{cases}$

$\underbrace{\vec{F}_N\cdot\hat{i}'} = m\vec{a}\cdot\hat{i}'$ (recordar que $\vec{a}(t=0) = -R\omega^2\hat{i}'$)

$-KL + F_E = -mR\omega^2 \Rightarrow \boxed{F_E = KL - mR\omega^2}$

$\underbrace{\vec{F}_N\cdot\hat{j}'} = m\vec{a}\cdot\hat{j}'$

$N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$

$\Rightarrow |\vec{F}_E| \leq \mu_E|\vec{N}| \Rightarrow |KL - mR\omega^2| \leq \mu_E|mg|$ → ES NECESARIO ESTUDIAR LOS SIGNOS DE LAS EXPRESIONES INTERIORES

$\begin{cases} mg > 0 \Rightarrow |mg| = mg \\ \text{Por letra: } KL > mR\omega^2 \Rightarrow |KL - mR\omega^2| = KL - mR\omega^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow KL - mR\omega^2 \leq \mu_E mg \Rightarrow \boxed{\mu_E \geq \frac{KL}{mg} - \frac{R\omega^2}{g}}$$

iii) Si no se cumple lo anterior → a) Condición de no desprendimiento
b) Si no desprende, hallar la ec. de movimiento

→ Considerando la dirección de las fuerzas es claro que la base más adecuada es $\{\hat{i}', \hat{j}'\}$

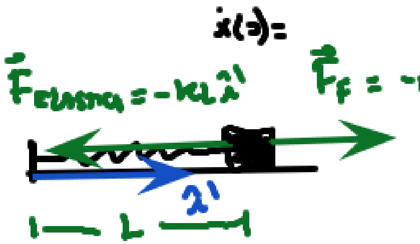
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{a} &= -R\omega^2 \hat{e}_\rho + \ddot{x}\,\hat{i}' \\ \hat{e}_\rho &= \cos(\omega t)\,\hat{i}' + \sin(\omega t)\,\hat{j}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a}(t) = [\ddot{x} - R\omega^2\cos(\omega t)]\,\hat{i}' - R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{j}'}$$

$\hat{v}_r$ → versor con el sentido de la velocidad relativa

→ El rozamiento será DINÁMICO: $\vec{F}_D = -f_D|\vec{N}|\dfrac{\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}$ ⇒ EXPRESIÓN TEÓRICA: EN LA PRÁCTICA ES NECESARIO DETERMINAR EN QUÉ SENTIDO DESLIZA Y COLOCAR UNA FUERZA DE MÓDULO $f_D|\vec{N}|$ APUNTANDO EN SENTIDO CONTRARIO

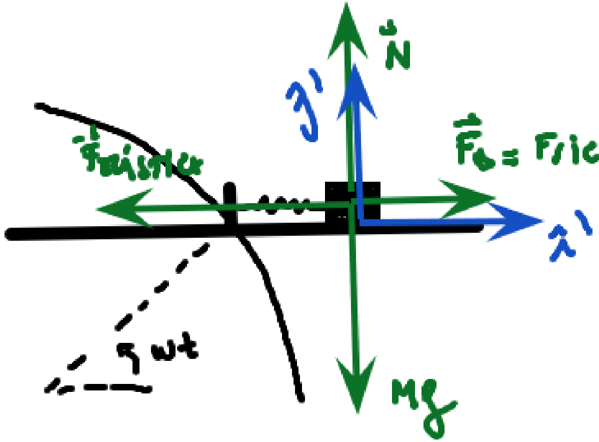
¿En qué sentido desliza en $t=0$?

Por letra: $\left.\underbrace{KL}_{\text{Fuerza elástica}} > \underbrace{mR\omega^2}_{\text{Fuerza ficticia } = -m\vec{a}_T}\right\} \Rightarrow$



⇒ Como parte del reposo relativo y la $\vec{F}$ elástica supera a la $\vec{F}$ ficticia, DESLIZARÁ HACIA LA IZQUIERDA

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_D = +f_D|\vec{N}|\,\hat{i}'}$$

$\Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_N = -mg\,\hat{j}' - Kx\,\hat{i}' + N\,\hat{j}' + f_D|\vec{N}|\,\hat{i}' \\ \vec{a} = [\ddot{x} - R\omega^2\cos\omega t]\,\hat{i}' - R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{j}' \end{cases}$$

Newton

$$\vec{F}_N\cdot\hat{i}' = m\vec{a}\cdot\hat{i}' \Rightarrow -Kx + f_D|\vec{N}| = m[\ddot{x} - R\omega^2\cos\omega t]$$

$$\vec{F}_N\cdot\hat{j}' = m\vec{a}\cdot\hat{j}' \Rightarrow N - mg = -mR\omega^2\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{N = m[g - R\omega^2\sin(\omega t)]}$$

Condición de no desprendimiento : $N > 0 \;\; \forall t \Rightarrow \underbrace{g > \underbrace{R\omega^2\sin\omega t}_{h(t)}}$

OJO: DEBO EXPRESAR LA CONDICIÓN EN TÉRMINOS DE LOS DATOS DEL PROBLEMA

Para que g sea mayor a $h(t)$, BASTA CON QUE SUPERE A SU VALOR MÁXIMO: $h_{max} = R\omega^2 \underbrace{(\sin\omega t)}_{\leq 1} = R\omega^2$

$\Rightarrow \boxed{g > R\omega^2}$ CONDICIÓN DE NO DESPRENDIMIENTO

Tenemos: $\left.\begin{aligned} -kx + f_D|\vec{N}| &= m[\ddot{x} - R\omega^2\cos\omega t] \\ N &= m[g - R\omega^2 \sin(\omega t)] \end{aligned}\right] \Rightarrow -kx + f_D\overbrace{|m(g - R\omega^2\sin(\omega t))|}^{\text{si } N>0 \Rightarrow \text{ Puedo quitar el } |\,|} = m\ddot{x} - mR\omega^2\cos(\omega t)$

$$-kx + f_D mg - f_D mR\omega^2 \sin(\omega t) = m\ddot{x} - mR\omega^2\cos\omega t$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = f_D g + R\omega^2\left[\cos(\omega t) - f_D \sin(\omega t)\right]}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

(ojo! esta ecuación sólo es válida mientras desliza hacia la izquierda. ¿Por qué?)

¿Por qué no coloqué la $\vec{F}_{\text{ficticia}}$? $\Rightarrow$ ESTOY ANALIZANDO EL PROBLEMA DESDE EL SISTEMA ABSOLUTO (INERCIAL) DONDE VALE LA LEY $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$

¿Es posible hallar la ecuación de movimiento trabajando en S'? Si: $\vec{F}_N = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_N \underbrace{- m\vec{a}_T - m\vec{a}_c}_{\vec{F}\text{ ficticias}} = m\vec{a}'}$$

Veamos:

$$\begin{cases} \vec F_{NETA} = -mg\hat j' - kx\hat i' + N\hat j' + \mu_D|\vec N|\hat i' \\ \vec F_{Fict} = -m\vec a_T - m\vec a_c, \quad \text{con} \begin{cases}\vec a_T = -R\omega^2\hat e_\rho = -R\omega^2\cos(\omega t)\,\hat i' - R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat j' \\ \vec a_c = 0\end{cases} \\ \vec a' = \ddot x\,\hat i'\end{cases}$$

(ya lo habíamos calculado)

$$\longrightarrow \quad \vec F_{NETA} + \vec F_{Fict.} = m\vec a'$$

$$-mg\hat j' - kx\hat i' + N\hat j' + \mu_D|\vec N|\hat i' + mR\omega^2\cos(\omega t)\,\hat i' + mR\omega^2\sin(\omega t)\,\hat j' = m\ddot x\,\hat i'$$

$\hat i'$:

$$-kx + \mu_D|\vec N| + mR\omega^2\cos\omega t = m\ddot x$$

$\hat j'$:

$$\underbrace{N - mg + mR\omega^2\sin(\omega t)}_{} = 0$$

Equivalente a las ecuaciones anteriores → OBTENGO LA MISMA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

TÉRMINOS QUE APARECÍAN DEL LADO DERECHO CON SIGNO CONTRARIO COMO PARTE DE LA ACELERACIÓN TOTAL VISTA DESDE S, APARECEN COMO FUERZAS FICTICIAS CUANDO EL PROBLEMA ES ANALIZADO DESDE S'

iv) Hallar la ley horaria si $f_D = 0$

Teníamos: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = f_D g + R\omega^2\cos(\omega t) - f_D R\omega^2 \sin(\omega t) \xRightarrow{f_D=0} \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x = R\omega^2\cos(\omega t) \\ x(0) = L, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

ECUACIÓN LINEAL DE 2^{do} ORDEN, CON COEFICIENTES CONSTANTES, HETEROGÉNEA

MÉTODO DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

1) Resuelvo la homogénea:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \\ &\text{Propongo } x_H = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}_H = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}_H = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \\ &e^{\lambda t}(\lambda^2 + k/m) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 + k/m = 0} \end{aligned}$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 = -k/m \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, i \\ &\text{Si } \lambda = \alpha \pm \beta i \Rightarrow x_H(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2 \sin\beta t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\alpha = 0 \\ &\beta = \sqrt{k/m} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x_H(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right)}$$

2) Busco una solucion particular de la ecuacion completa $\qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = R\omega^2\cos(\omega t)$

En general se propone $\quad x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (esto sirve porque $\omega^2 \neq \frac{k}{m}$, convencerse)

En este caso, como la ecuación no depende de $\dot{x} \Rightarrow$ No precisamos el seno

$$\Rightarrow x_p(t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -\omega A\sin(\omega t) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\omega^2 A\cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{sustituyo}} -\omega^2 A\cancel{\cos\omega t} + \frac{k}{m}A\cancel{\cos\omega t} = R\omega^2\cancel{\cos\omega t}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) = R\omega^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{R\omega^2}{k/m - \omega^2}}$$

3) Escribo $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$ y determino c_1 y c_2 a partir de los datos iniciales $x(0) = L$ y $\dot{x}(0) = 0$:

$$\Rightarrow x(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + \frac{R\omega^2}{k/m - \omega^2}\cos(\omega t)$$

$\rightarrow x(0) = L \Rightarrow C_1 + \dfrac{R\omega^2}{k/m - \omega^2} = L \Rightarrow \boxed{C_1 = L - \dfrac{R\omega^2}{k/m - \omega^2}}$

$\rightarrow \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(L - \frac{R\omega^2}{k/m - \omega^2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{R\omega^2}{k/m - \omega^2}\cos(\omega t)}$$

Ley horaria en el sistema S'

Si se desea, se puede escribir el vector posicion visto desde S como:

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{e}_p(t) + x(t)\,\hat{\imath}, \quad \text{con} \begin{cases} \hat{e}_p(t) = \cos(\omega t)\,\hat{\imath} + \sin(\omega t)\,\hat{\jmath} \\ x(t) \text{ recién hallada} \end{cases}$$