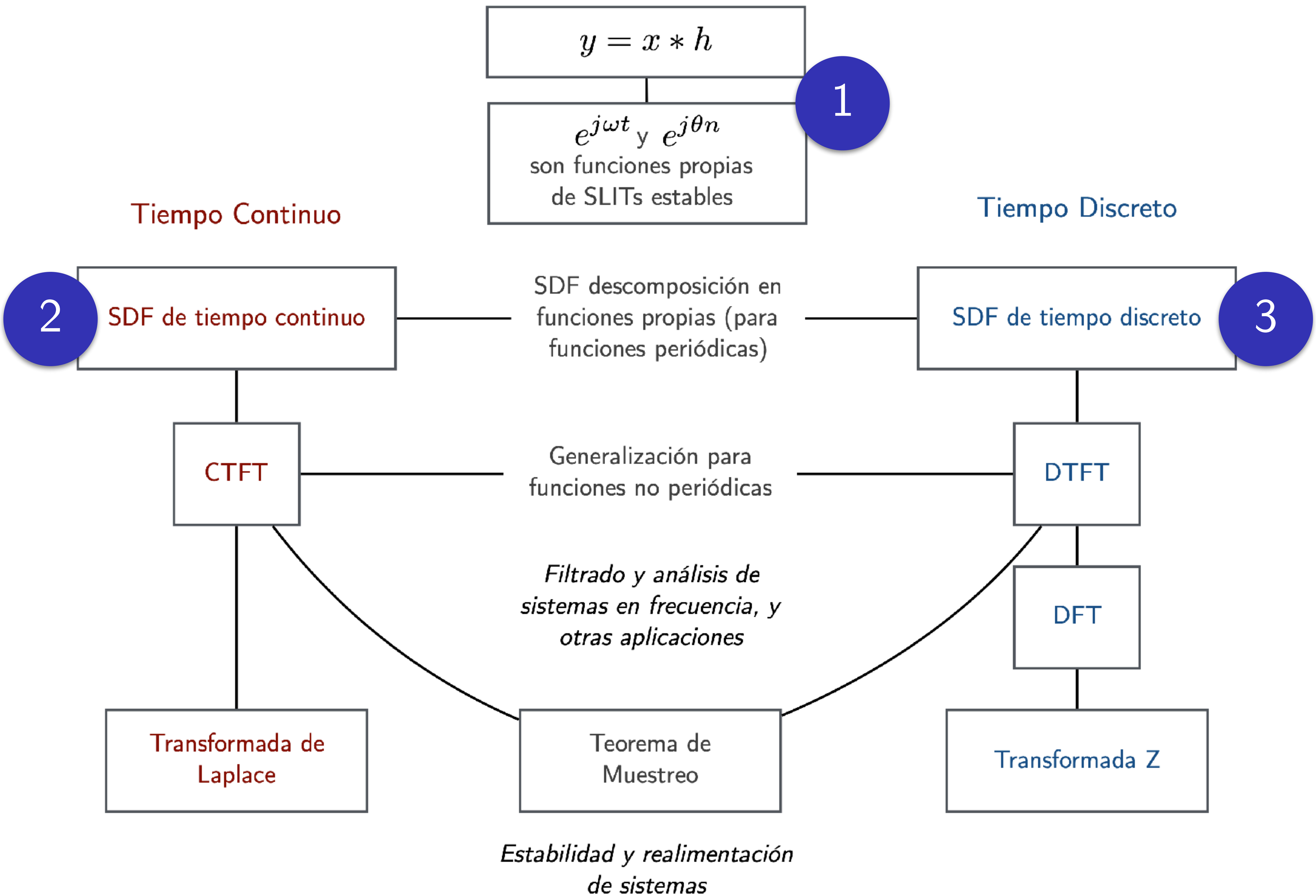
Señales y Sistemas

Series de Fourier

Instituto de Ingeniería Eléctrica

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Señales y sistemas



* tiempo o variable

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

Teorema: Sea H un SLIT BIBO estable con una entrada exponencial compleja $x(t)$, entonces la salida $y(t)$ es una exponencial compleja con el mismo argumento (frecuencia).

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t) = H(s)e^{st}$$

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{\text{Transformada de Laplace}} = e^{st}H(s)$$

$$s = j\omega \qquad x(t) = e^{j\omega t} \qquad y(t) = e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}_{\text{Transformada de Fourier}} = e^{j\omega t}H(j\omega)$$

BIBO estable $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < +\infty \Rightarrow H(j\omega)$ está bien definida.

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Recordar: Si $\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, entonces $\vec{v}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ con valor propio λ
- Entonces, las exponenciales complejas son vectores propios de los SLITs, con valor propio $H(s)$

$$x(t) = e^{st} \xrightarrow{H} y(t) = H(s)e^{st}$$

- Con $s = j\omega$ vale en general

$$y(t) = |H(j\omega)|e^{j\omega t + \angle H(j\omega)}$$

- ...y en particular tenemos

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{H} y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$$

- ¿Recuerdan la definición de no-distorsión de un circuito/sistema?

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Vale lo mismo en variable discreta.

$$
\begin{aligned}
x[n] &= z^n \\
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \\
&= \sum_{k} h[k]z^{n-k} = z^n \underbrace{\boxed{\sum_{k} h[k]z^{-k}}}_{\text{Transformada Z}} \\
&= z^n \boxed{H(z)}
\end{aligned}
$$

$$
z = e^{j\theta} \xrightarrow{H} y[n] = H\left(e^{j\theta}\right) e^{j\theta n}
$$

$$
z = \cos(\theta_0 n) \xrightarrow{H} y[n] = |H(e^{j\theta_0})| \cos\left(\theta_0 n + \angle H(e^{j\theta_0})\right)
$$

Respuesta de SLITs a entradas exponenciales

- Generalizando, vemos que si la entrada a un SLIT BIBO estable es una combinación lineal de exponenciales complejas, entonces, la salida se puede representar como una combinación lineal de las mismas exponenciales complejas.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \xrightarrow{H} y(t) = \sum_k a_k H\left(s_k\right) e^{s_k t}$$

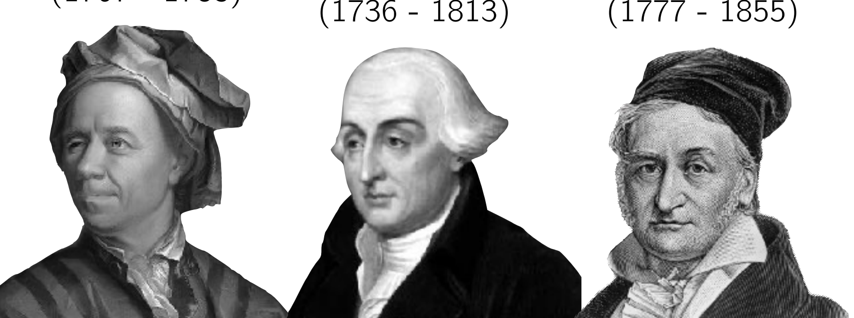
$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{H} y[n] = \sum_k a_k H\left(z_k\right) z_k^n$$

- Este resultado fue planteado por Euler, usado por Gauss, Lagrange y otros, y luego Fourier los generalizó preguntando...

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)



¿Qué funciones pueden representarse como la combinación lineal de exponenciales complejas?

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)

Series de Fourier

Series de Fourier

- $x(t)$ periódica, de período T: $\quad x(t+T) = x(t)\,\forall t \qquad (\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T})$

Serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{Síntesis}$$

$$a[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \qquad \text{Análisis}$$

- Descomposición en senos y cosenos

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) - 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t)$$

contínua,
promedio,
media, ...

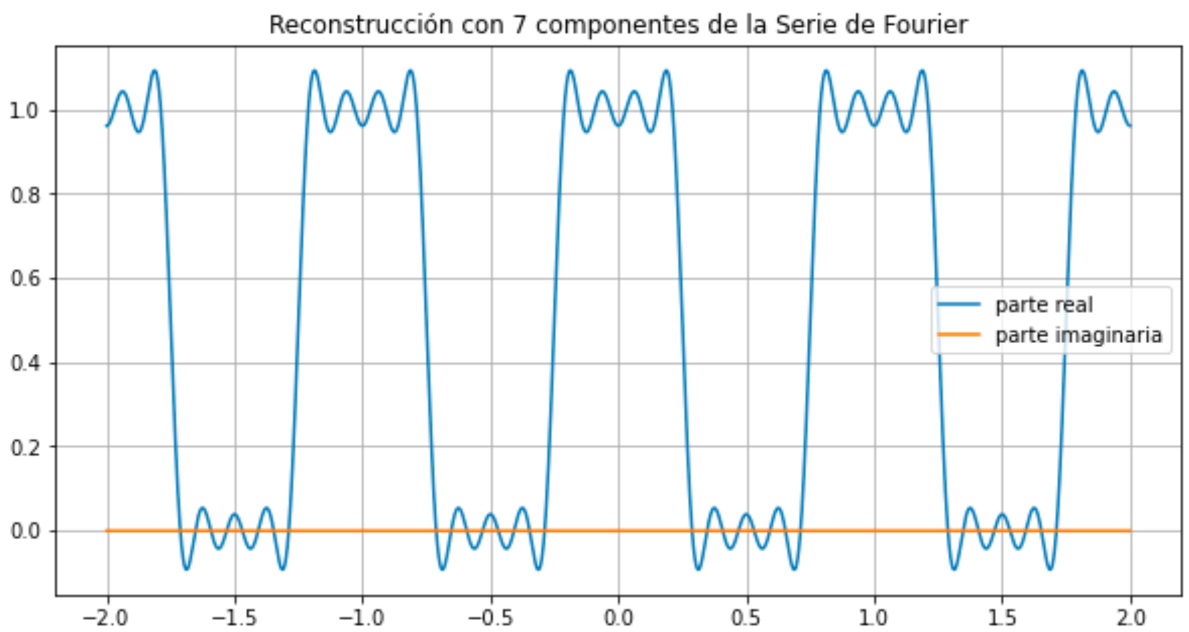
reales

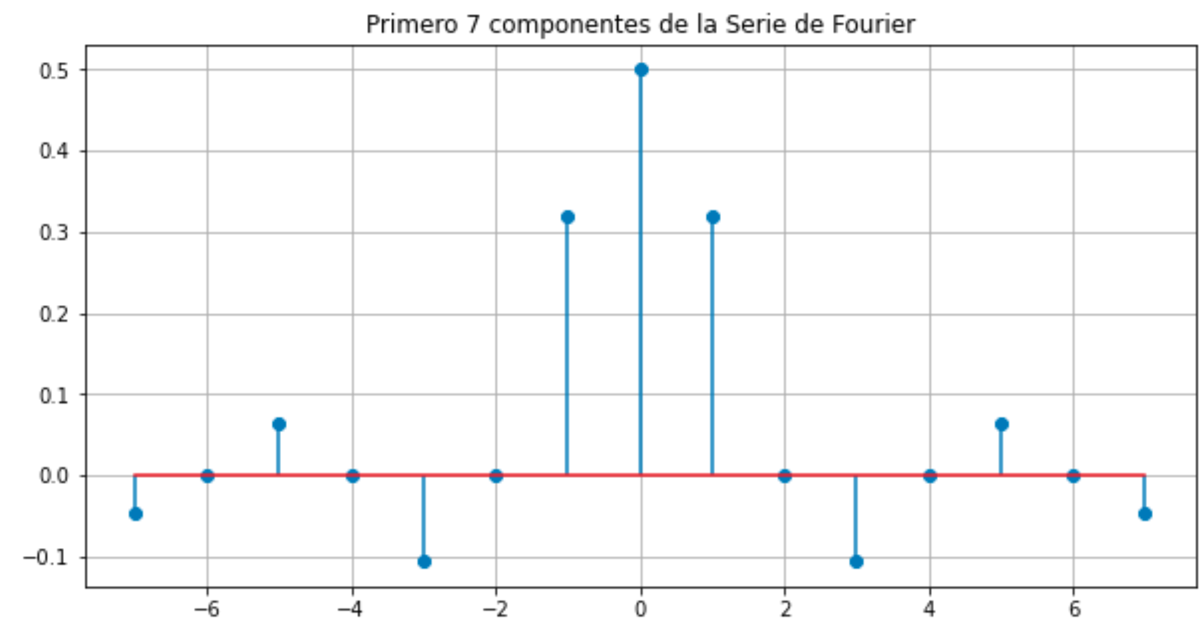
Series de Fourier

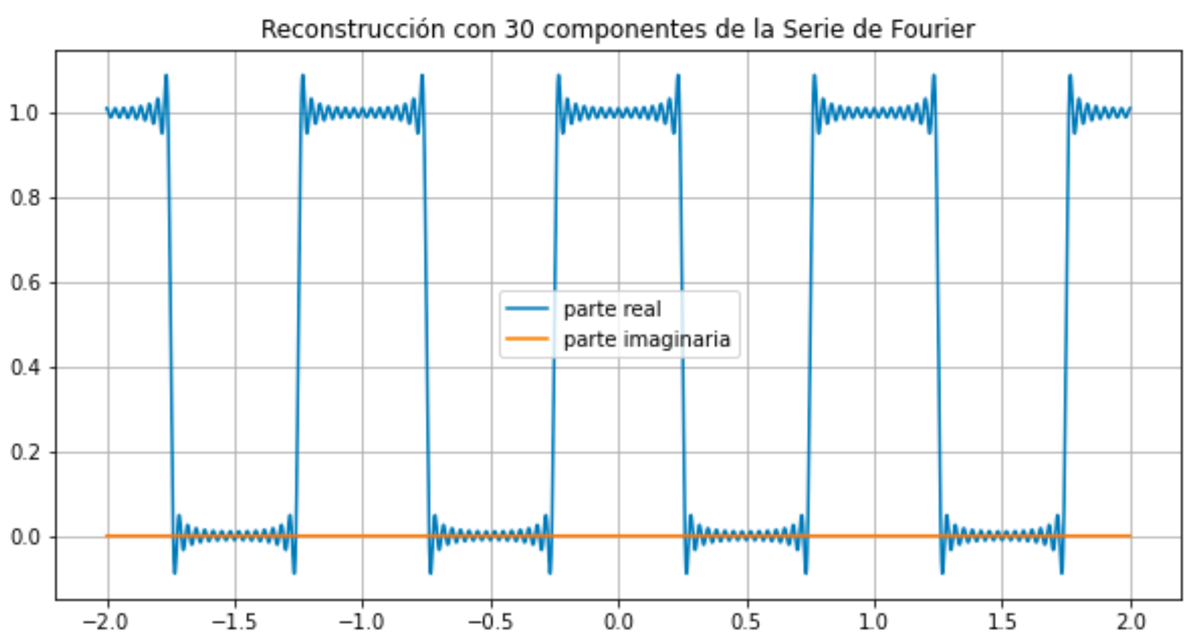
$$x(t) = \sum_{k=-N}^{N} a[k] e^{jk\omega_0 t}$$

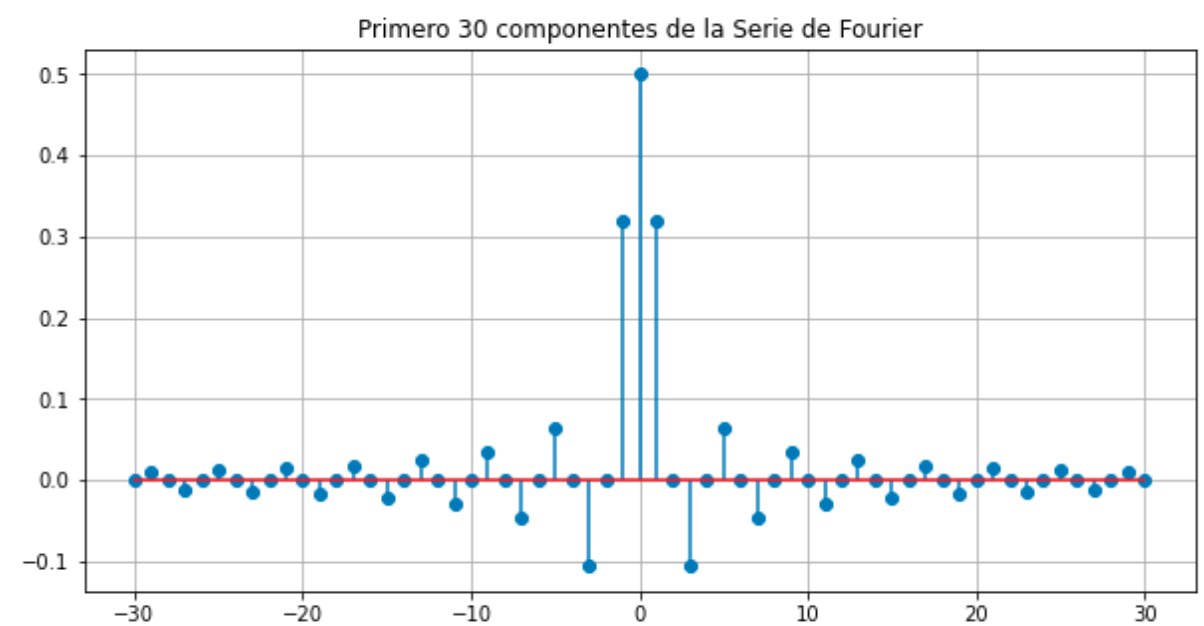
$x(t)$

$a[k]$







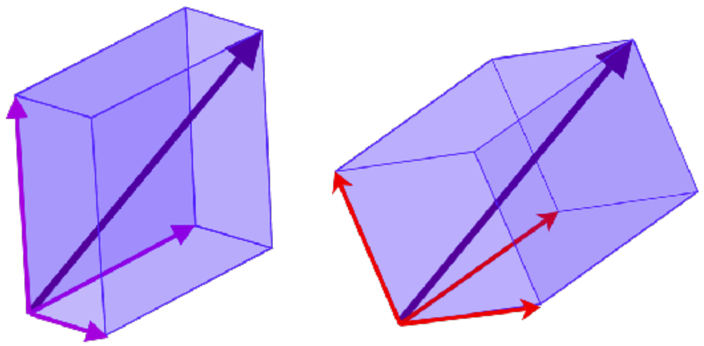


Series de Fourier

- Producto interno de señales periódicas T

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)y^*(t)dt \quad \Rightarrow \quad a[k] = \langle x(t), e^{jk\omega_0 t}\rangle$$

- La Serie de Fourier de una señal periódica es su representación en una base ortonormal (de dimensión infinita) de exponenciales (o senos y cosenos) de frecuencias $k\omega_0$.
  - Los $a[k]$ ($b[k]$, $c[k]$) son los coeficientes de la descomposición.
  - Las exponenciales son los vectores propios, los coeficientes son los valores propios.

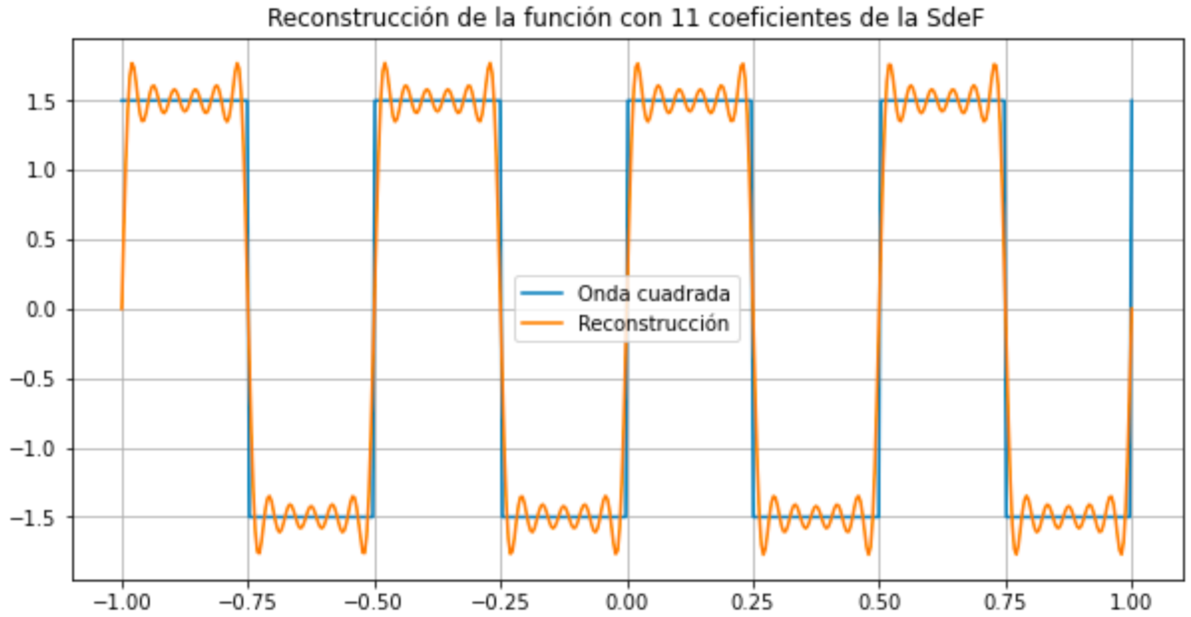


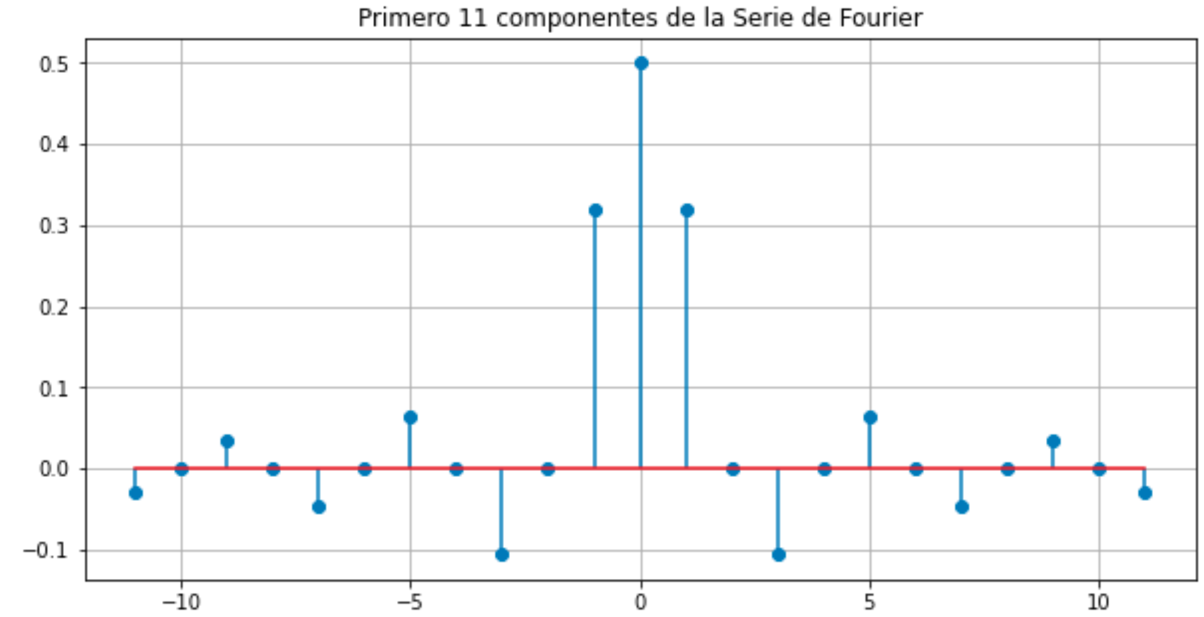
El mismo vector puede representarse en dos bases diferentes.

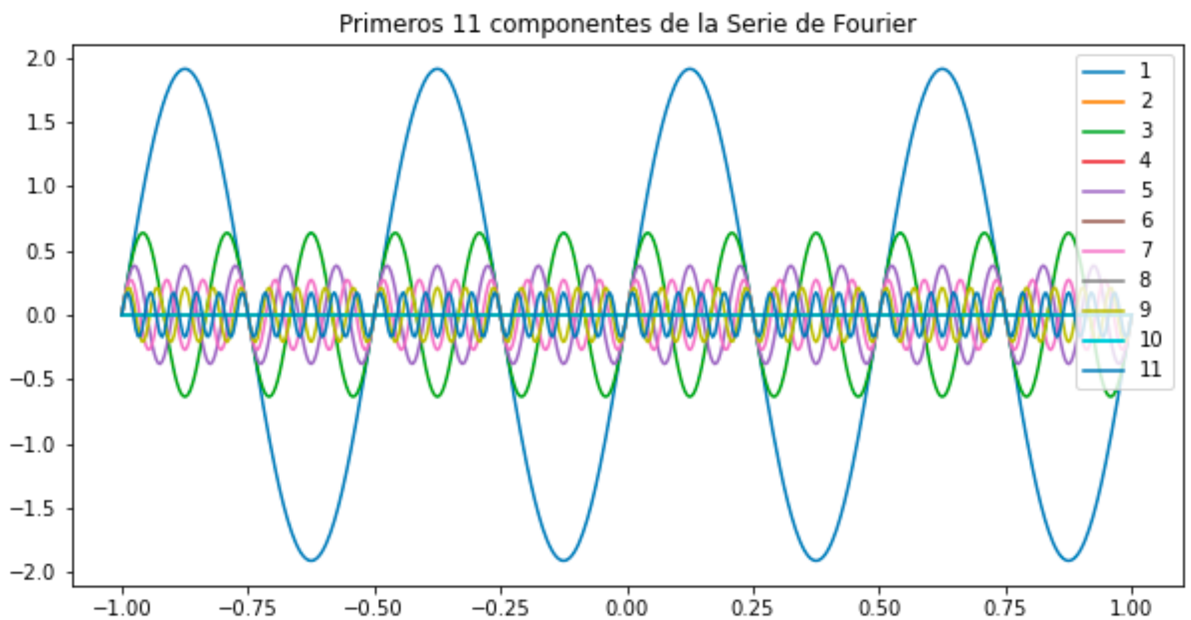
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{Serie de Fourier}$$

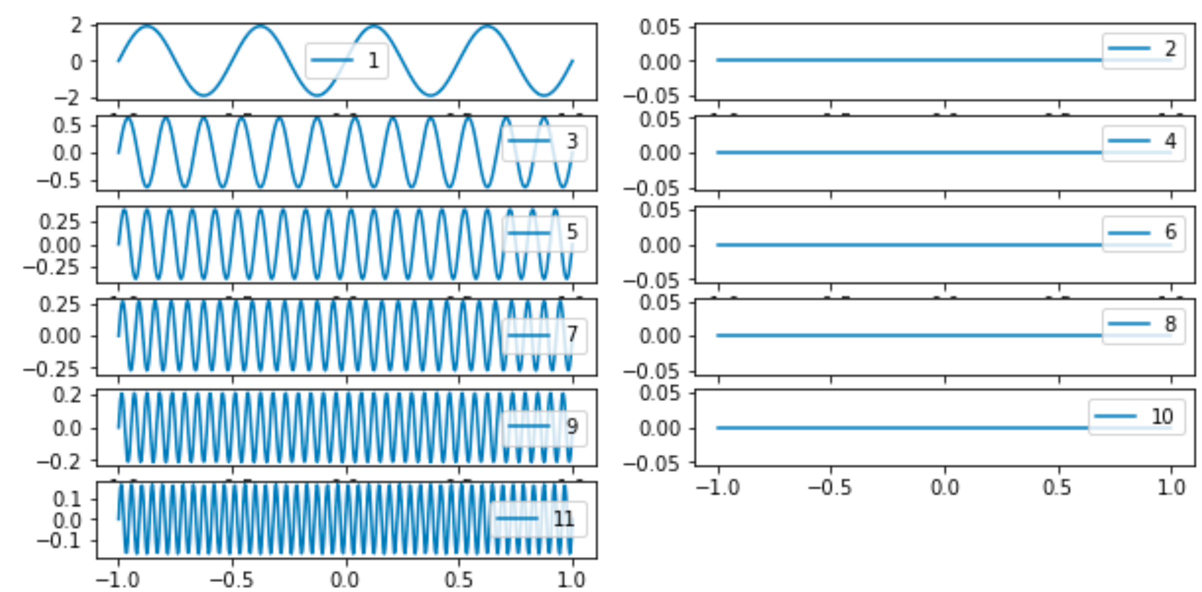
Series de Fourier

$x(t)$ $c[k]$ $b[k] = 0$

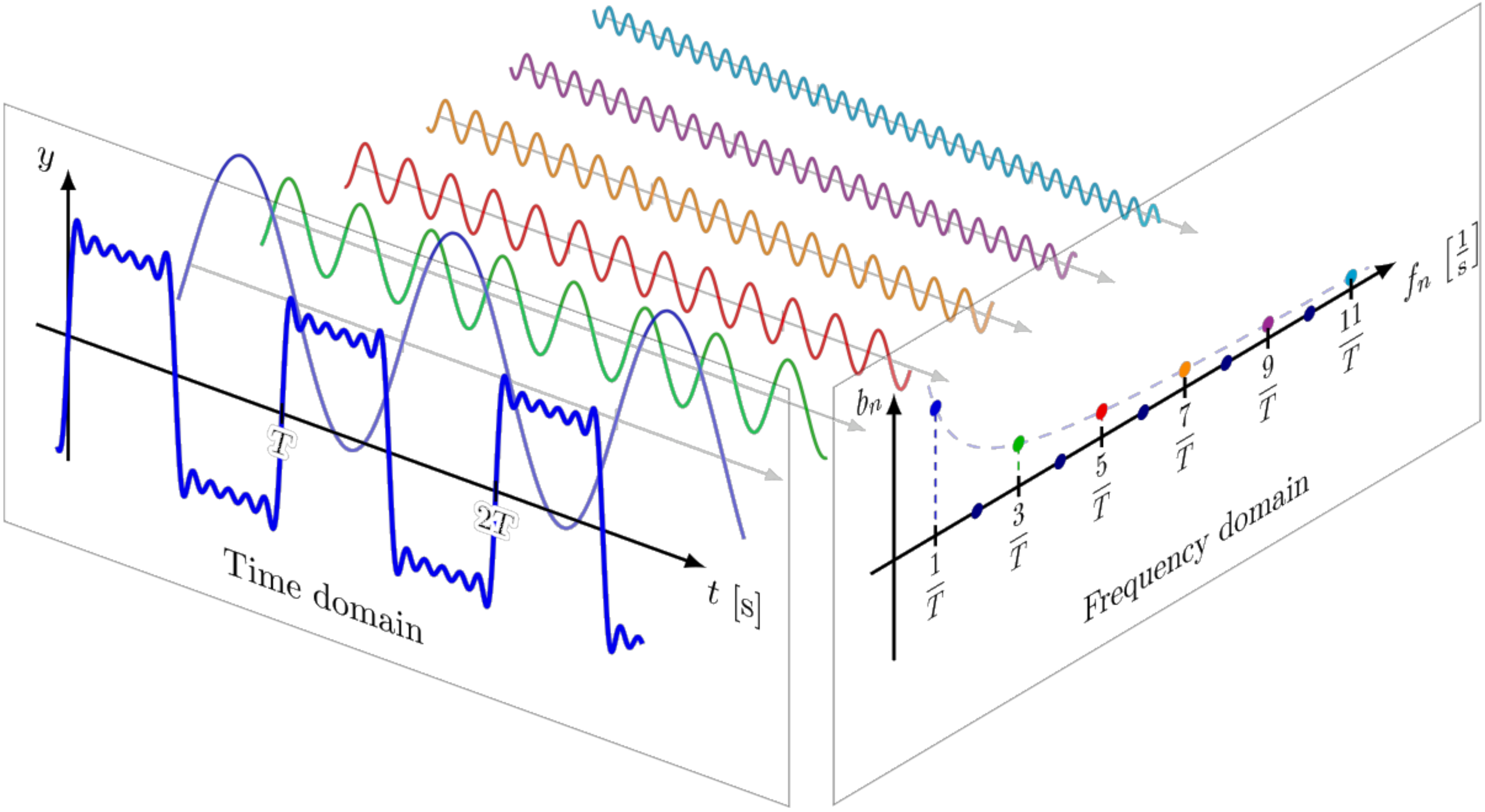




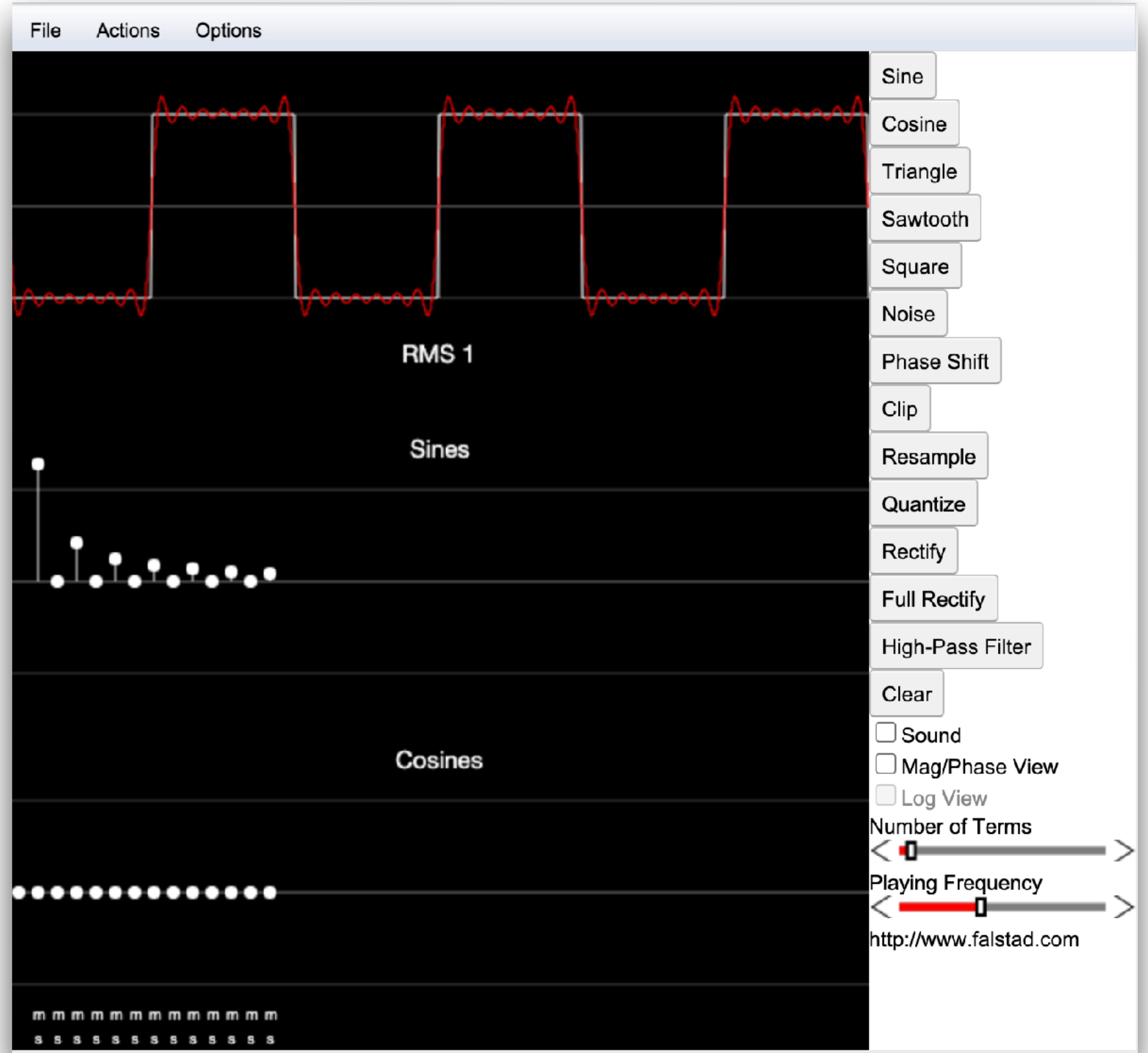




Series de Fourier



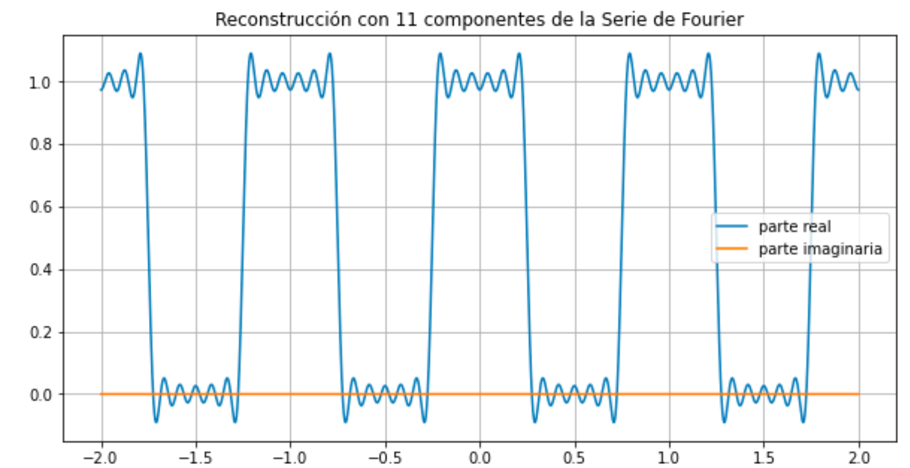
Series de Fourier

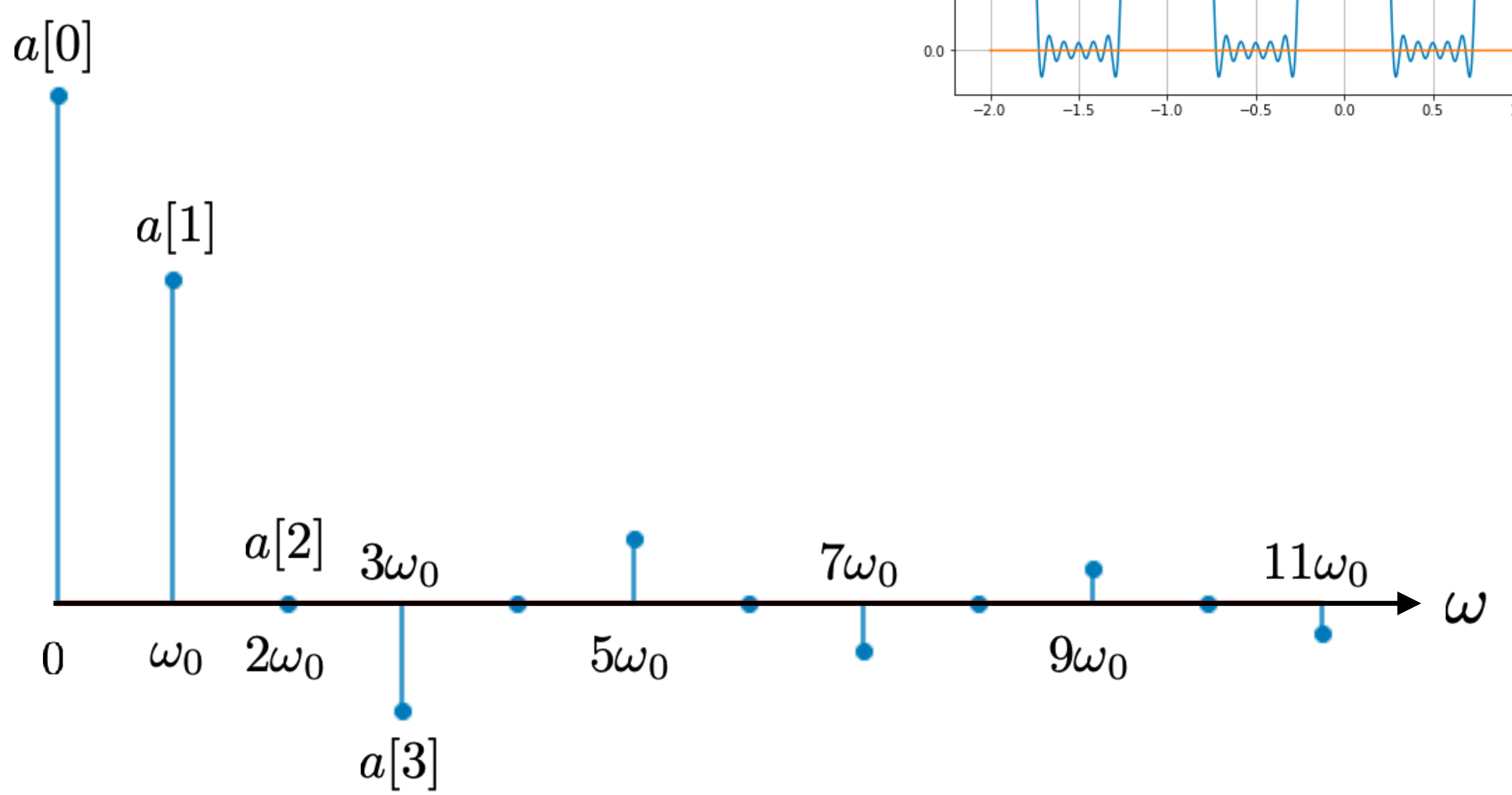


http://www.falstad.com/fourier/

Series de Fourier

- Espectro: gráfica de los valores de la representación frecuencial (dominio de Fourier)





Frecuencia $\omega = 0$ es *la continua*

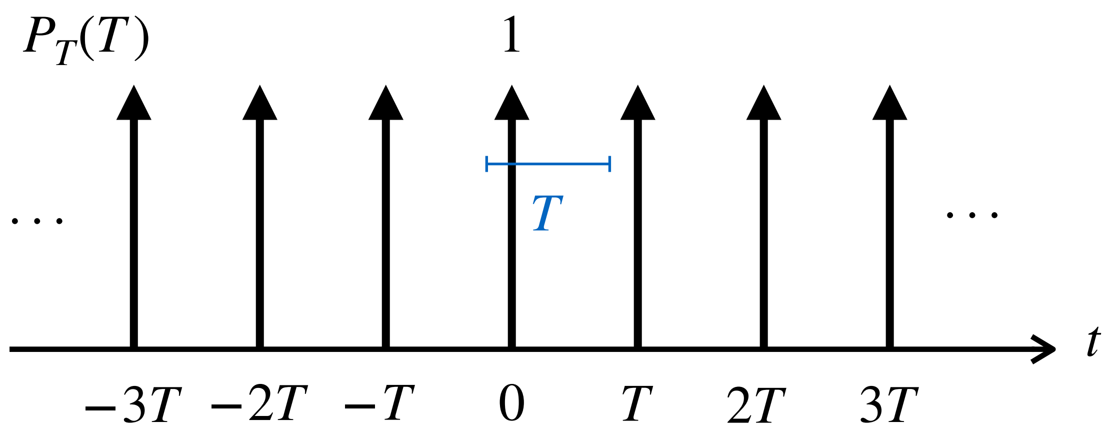
Bajas frecuencias

Altas frecuencias

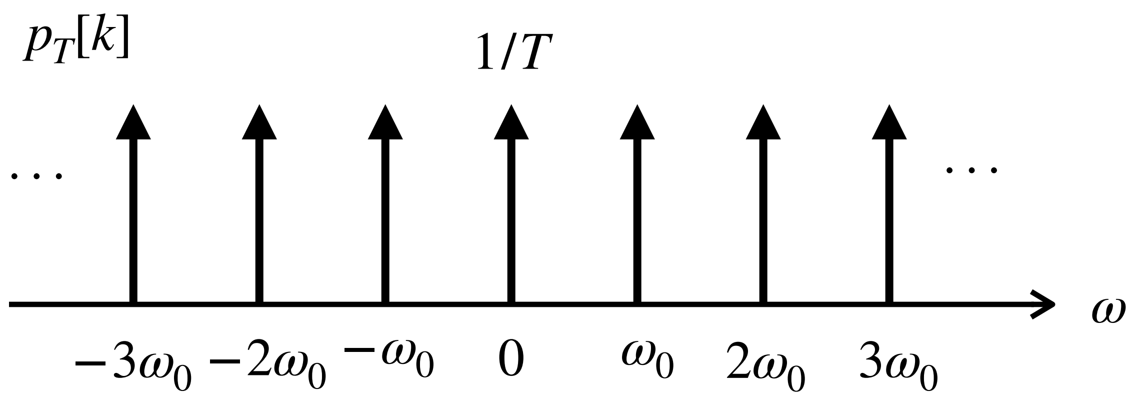
- Peine de Dirac o Tren de Impulsos

$$P_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

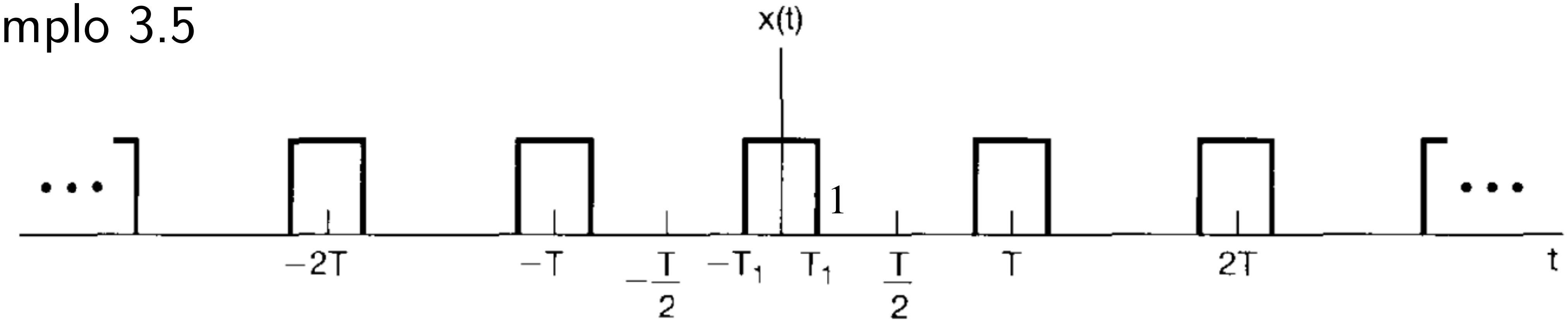
$$= \frac{1}{T} \sum_k e^{jk\omega_0 t}$$



$$p_T[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \delta(t - mT) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} e^{-j2\pi k m} = \frac{1}{T}$$



- Ejemplo 3.5



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

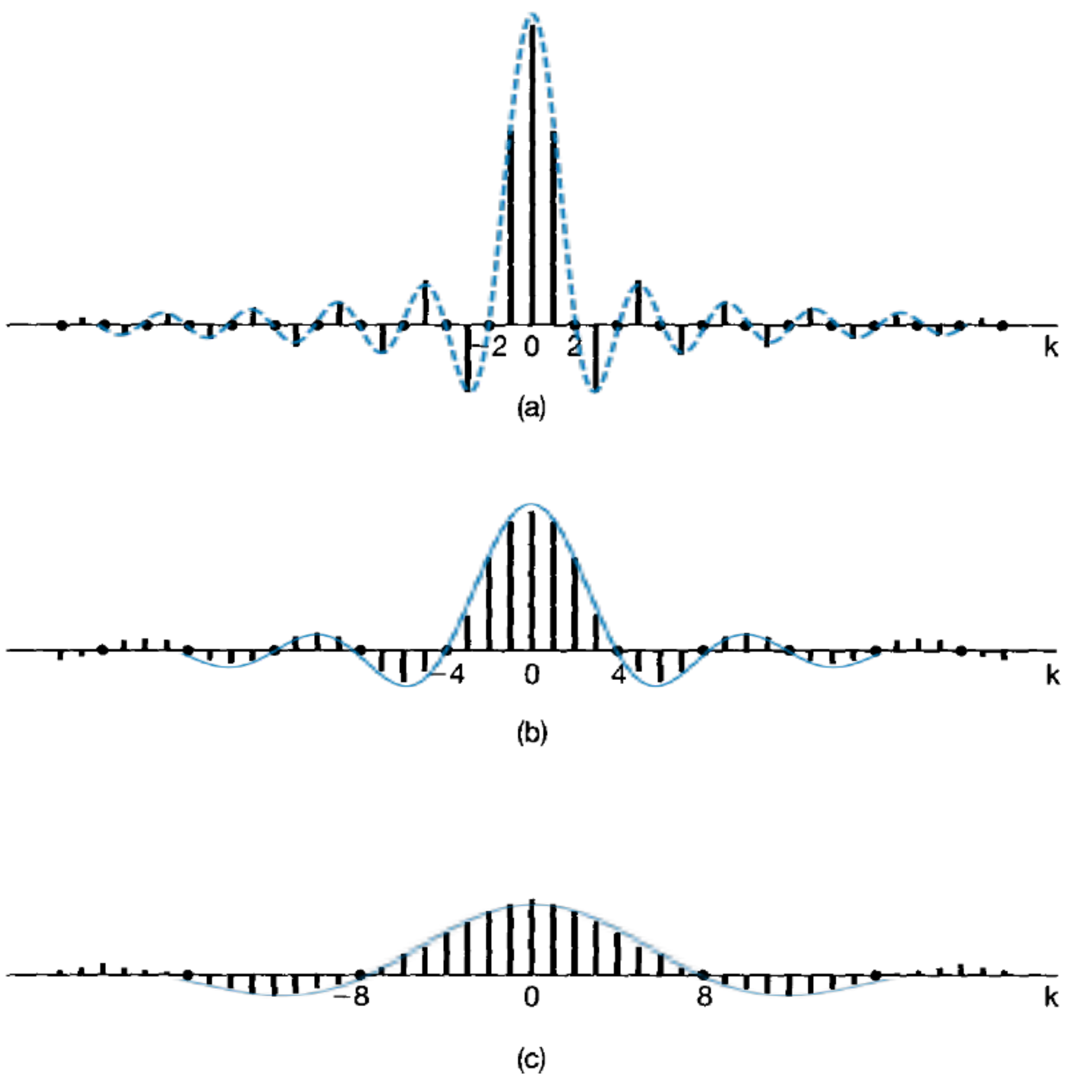
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} = \sum_k \Pi\left(\frac{t-kT}{T_1}\right) \qquad a_0 = \frac{T_1}{2T},\ a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}$$

$T = 4T_1$

$T = 8T_1$

$T = 16T_1$



Convergencia de las Series de Fourier

- Consideremos $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$ y $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$, queremos

$$E_N = \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt \xrightarrow{N \uparrow +\infty} 0$$

- Los a_k óptimos con $x_N(t)$ son $a_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$, entonces $x_N(t)$ es una versión truncada de la SdeF.
- En general, si la señal (periódica) es continua, sí se cumple, y la señal es igual a su representación en Serie de Fourier.
- También si es de energía finita $\int_{\langle T \rangle} |x(\tau)|^2 d\tau < \infty \Rightarrow a_k < \infty$
  - Los sistemas físicos responden a señales de energía finita en un período y esto se va a cumplir en la práctica.
- Si la señal no es continua se definen un conjunto de condiciones que debe cumplir para la convergencia.

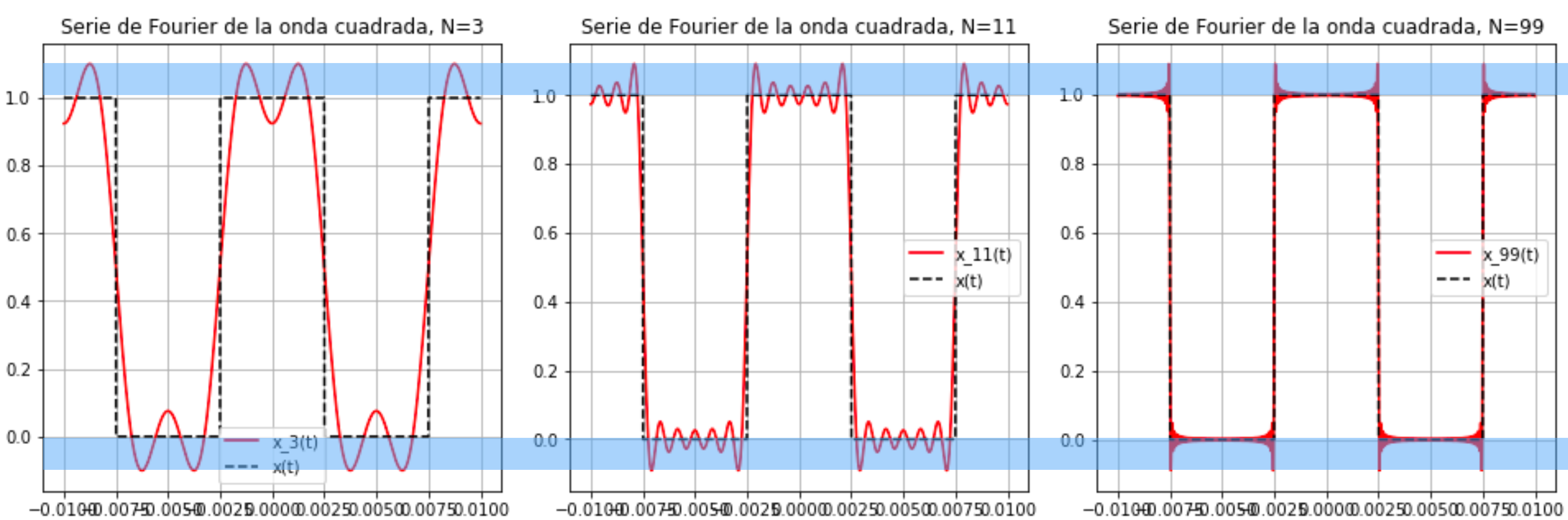
Convergencia de las Series de Fourier

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

- Condiciones de Dirichlet (en un período)

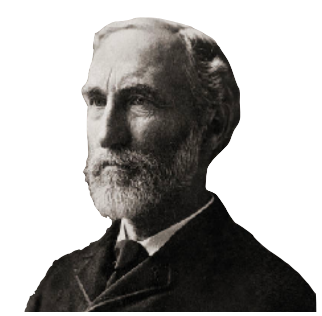
  1. Ser absolutamente integrable
  $$\int_{\langle T \rangle} |x(\tau)| d\tau < \infty \Rightarrow |a_k| < \infty$$
  2. Variaciones acotadas, o sea, número finito de máximos y mínimos.
  3. Número finito de discontinuidades y éstas son finitas.

- Garantizan que la $e(t) = 0$ y que en las discontinuidades vale
$$x_N(t_k) \xrightarrow{N \uparrow \infty} \frac{1}{2}(x(t_k^+) + x(t_k^-))$$



Independiente de N

(Fenómeno de Gibbs)



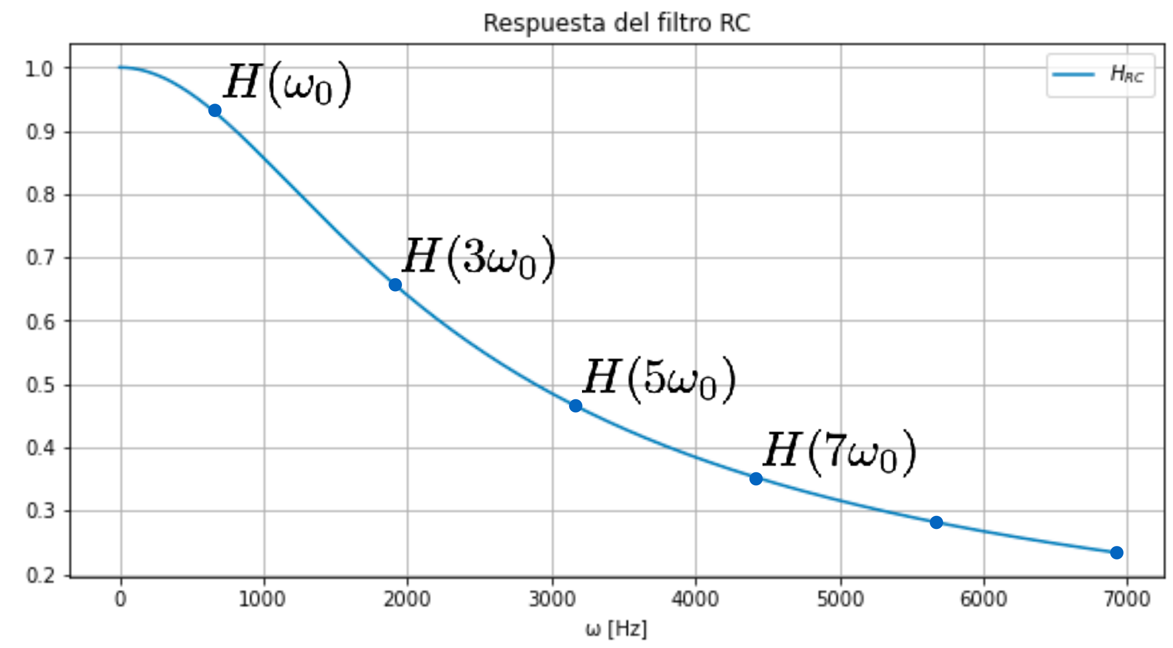
Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903)

Serie de Fourier: Filtrado

$$x(t) = \sum_k a[k] e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{H} y(t) = \sum_k a[k] H\left(jk\omega_0\right) e^{jk\omega_0 t}$$

- Modificar los coeficientes de la SdeF en frecuencia a partir de los valores de $H(jk\omega_0)$.
  - Multiplica los coeficientes por $H(jk\omega_0)$

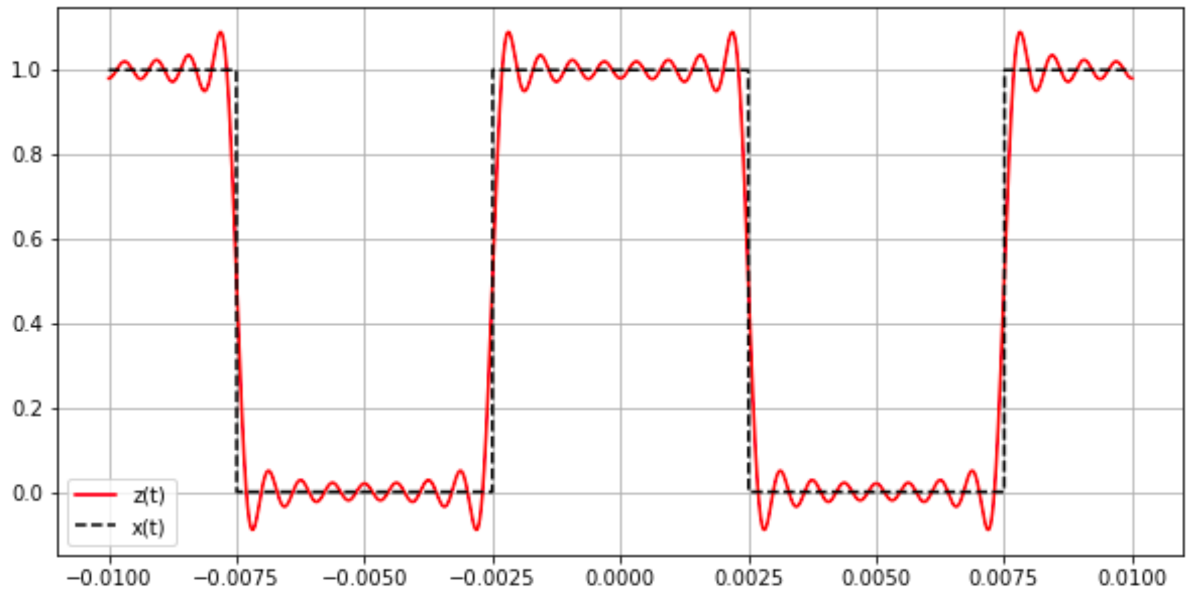
$$H_{RC}(j\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

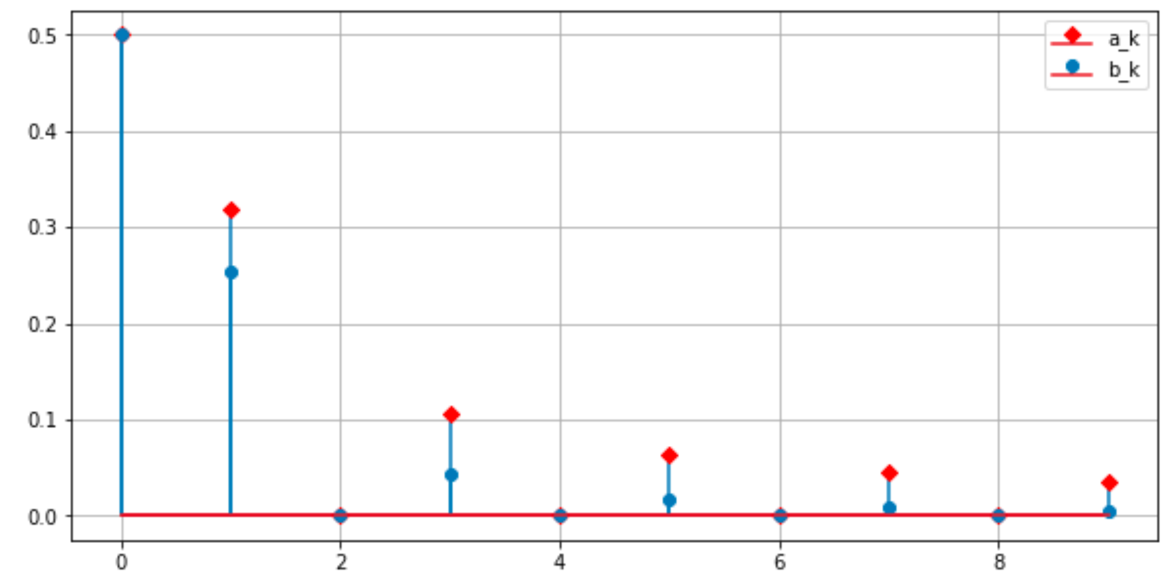


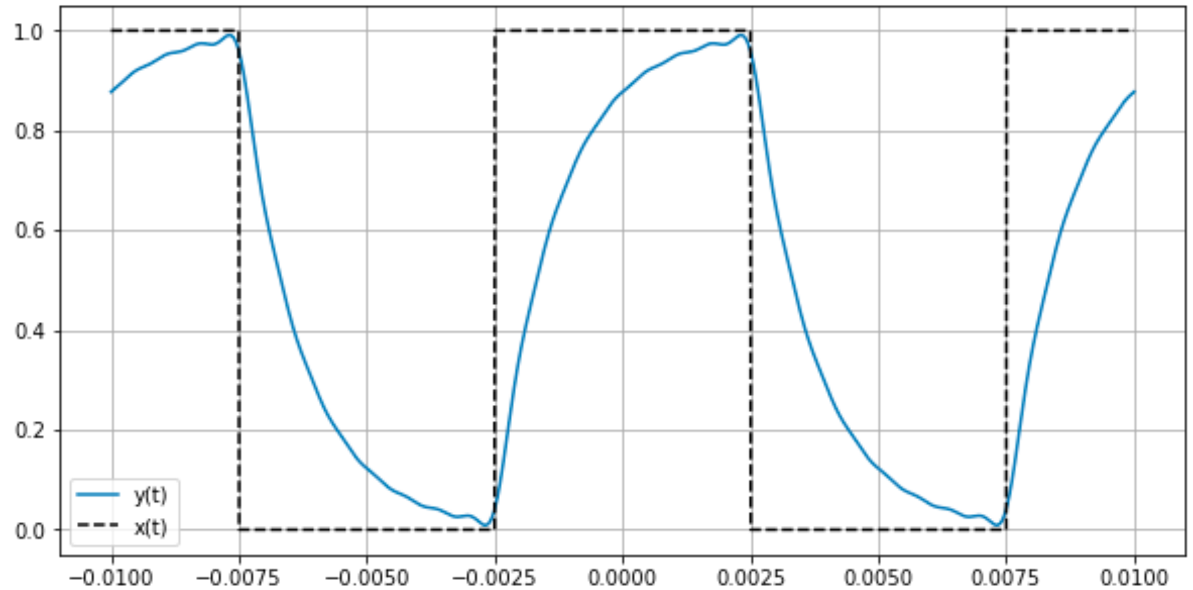
Serie de Fourier: Filtrado

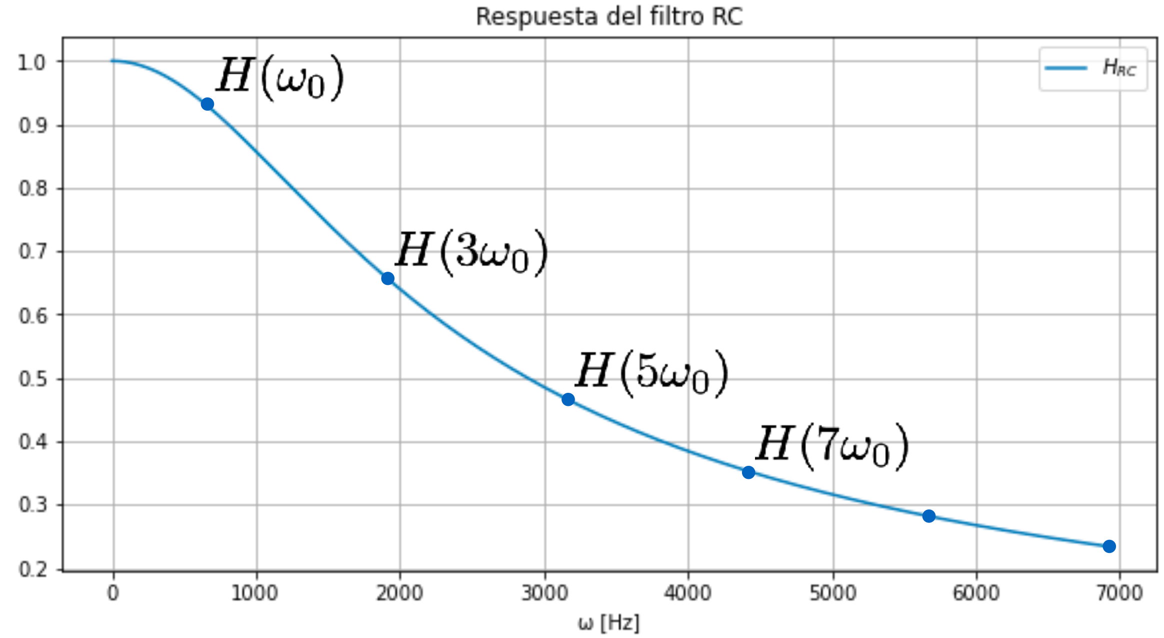
- Filtrado de una onda cuadrada con un RC

$$H_{RC}(j\omega) = \frac{1}{RC}\frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$





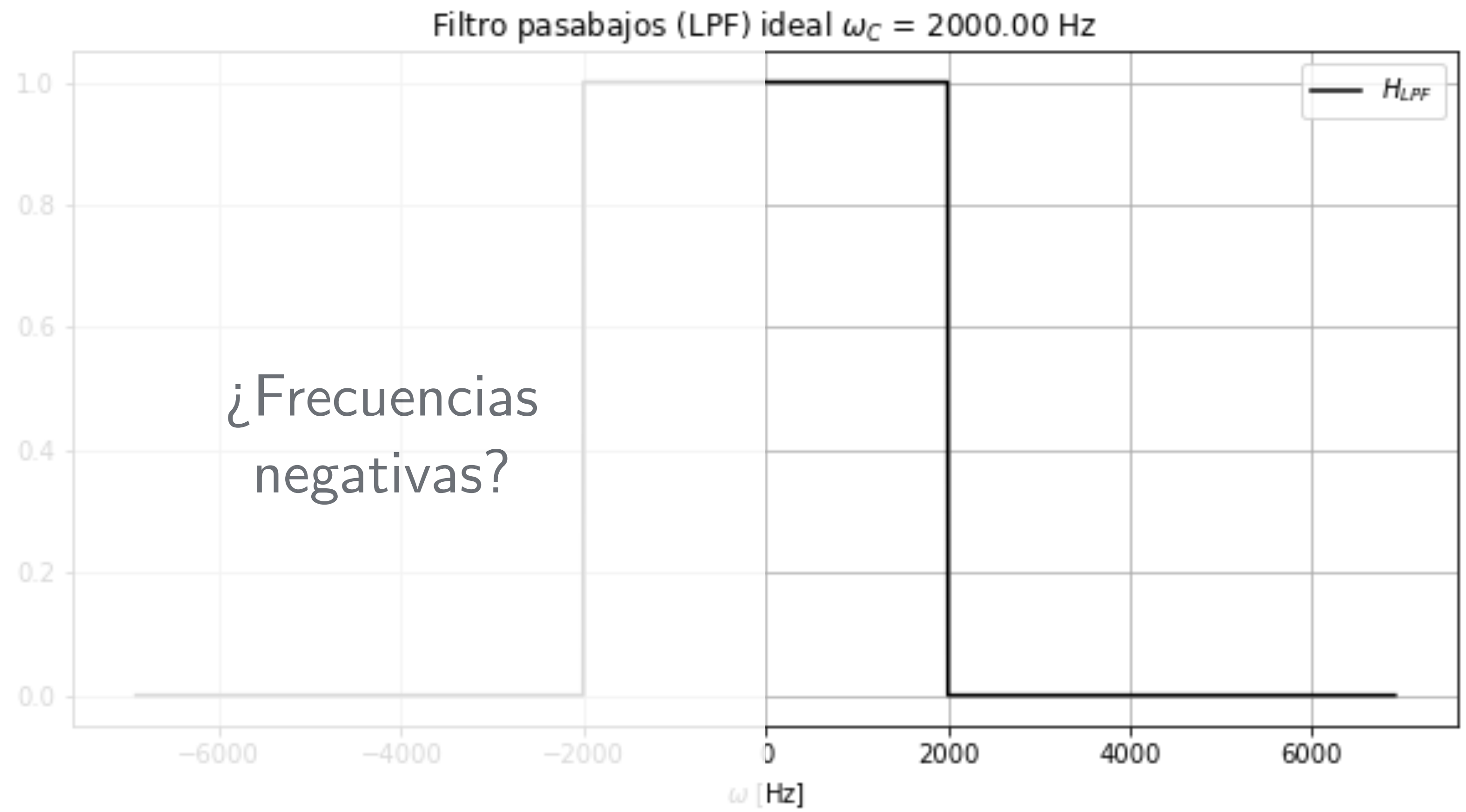




Serie de Fourier: Filtrado

- Filtro pasabajos ideal (LPF)

$$H_{LPF} = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_C}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_C \\ 0, & |\omega| > \omega_C \end{cases}$$



Algunas funciones e identidades útiles

$\text{sinc}\ t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ $\qquad$ $\text{sign}\ t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ $\qquad$ $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

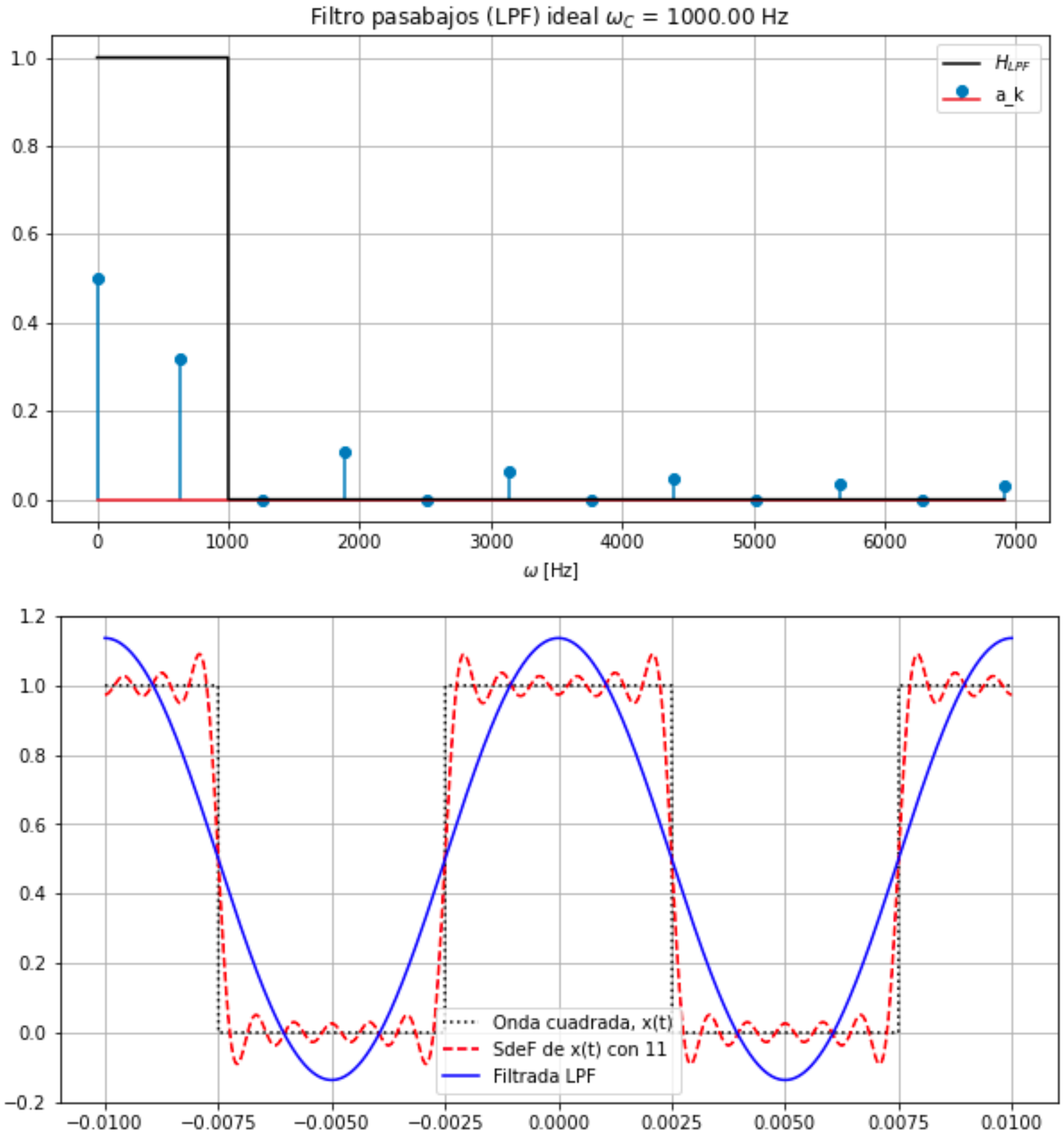
$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ $\qquad$ $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\alpha t} = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - k\frac{2\pi}{\alpha}\right)$, Fōrmula de Poisson

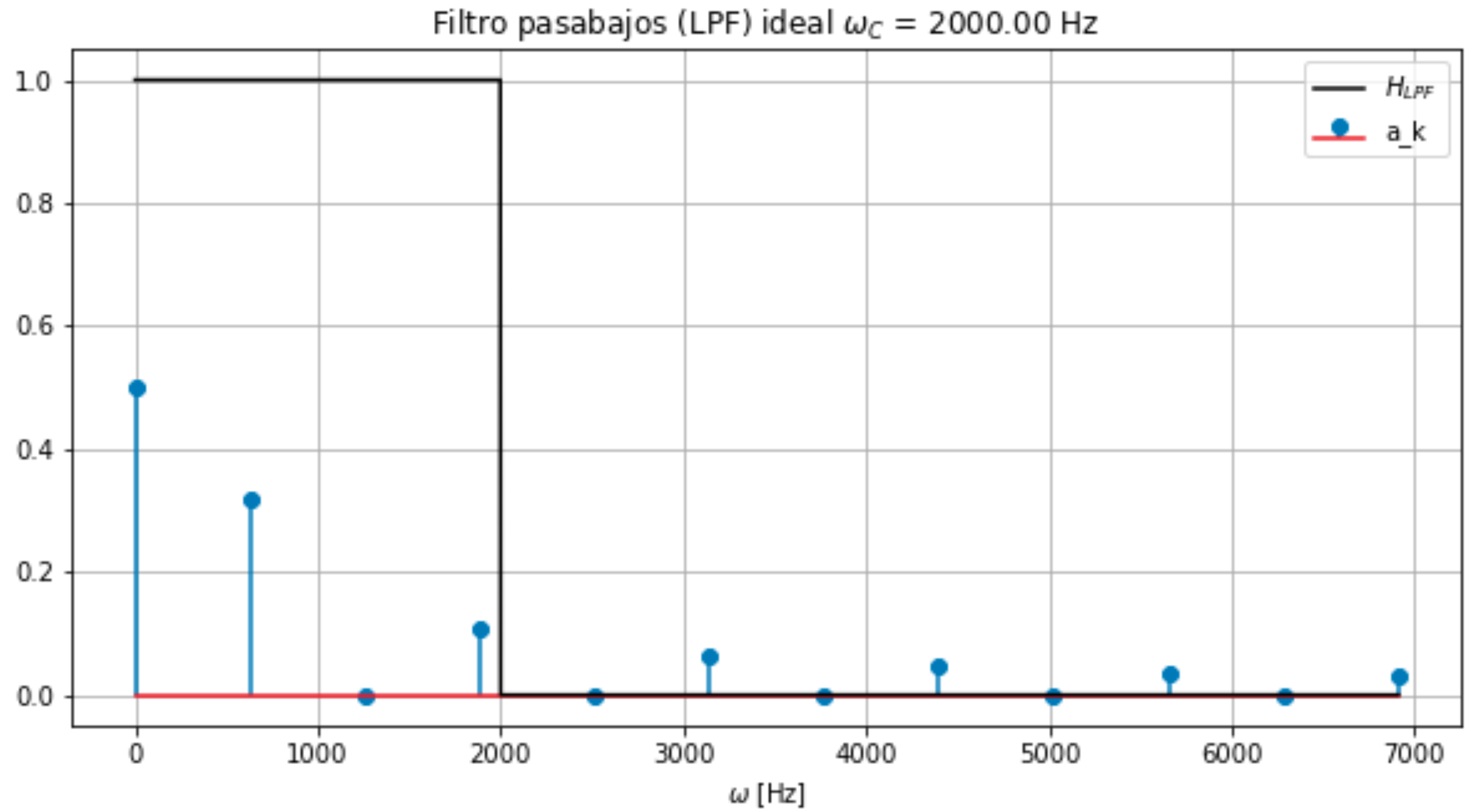
$\sum^{N_2} \ldots \alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}$ ...

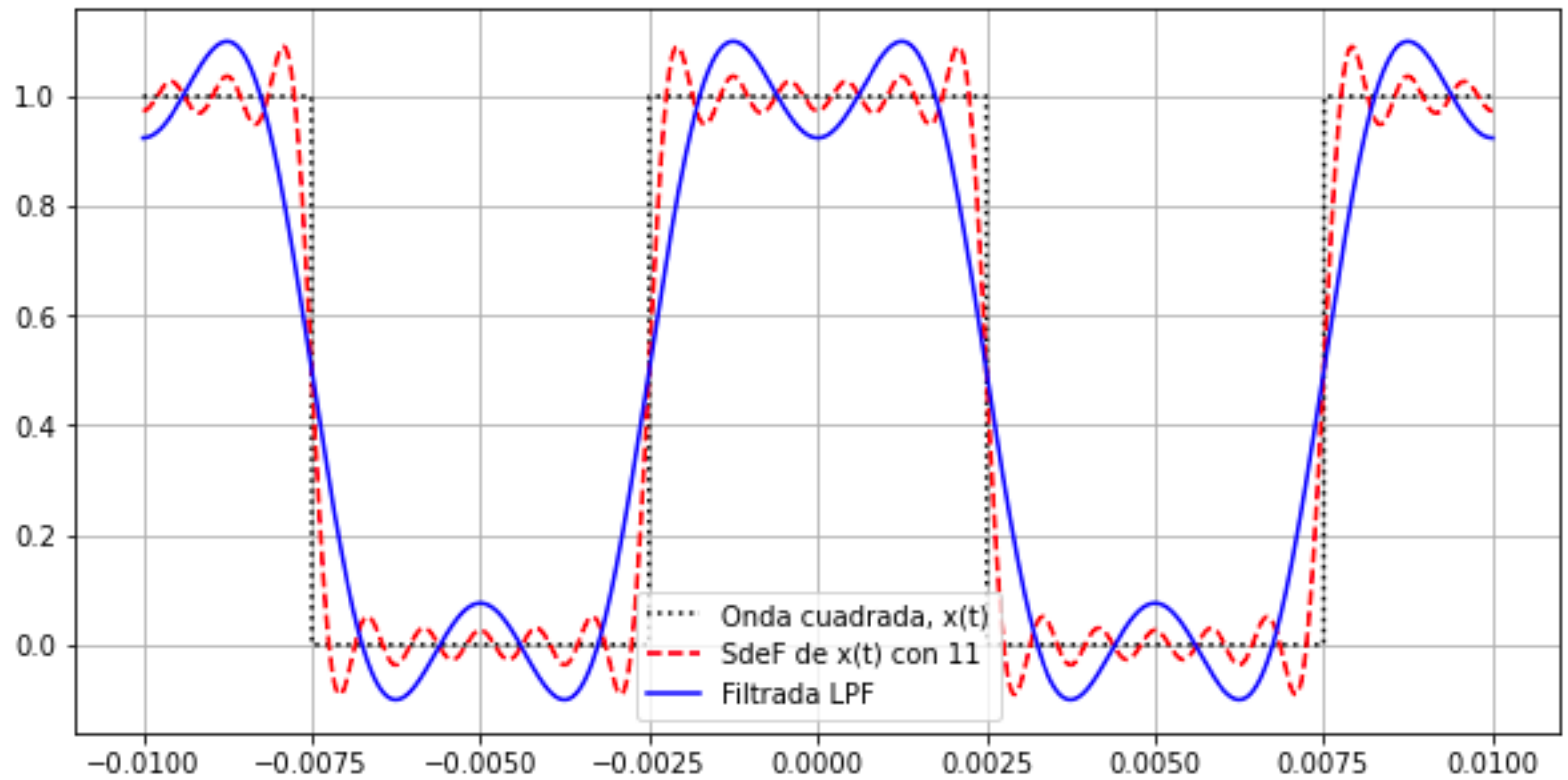
← Hoja de fórmulas (EVA/seys)

Serie de Fourier: Filtrado

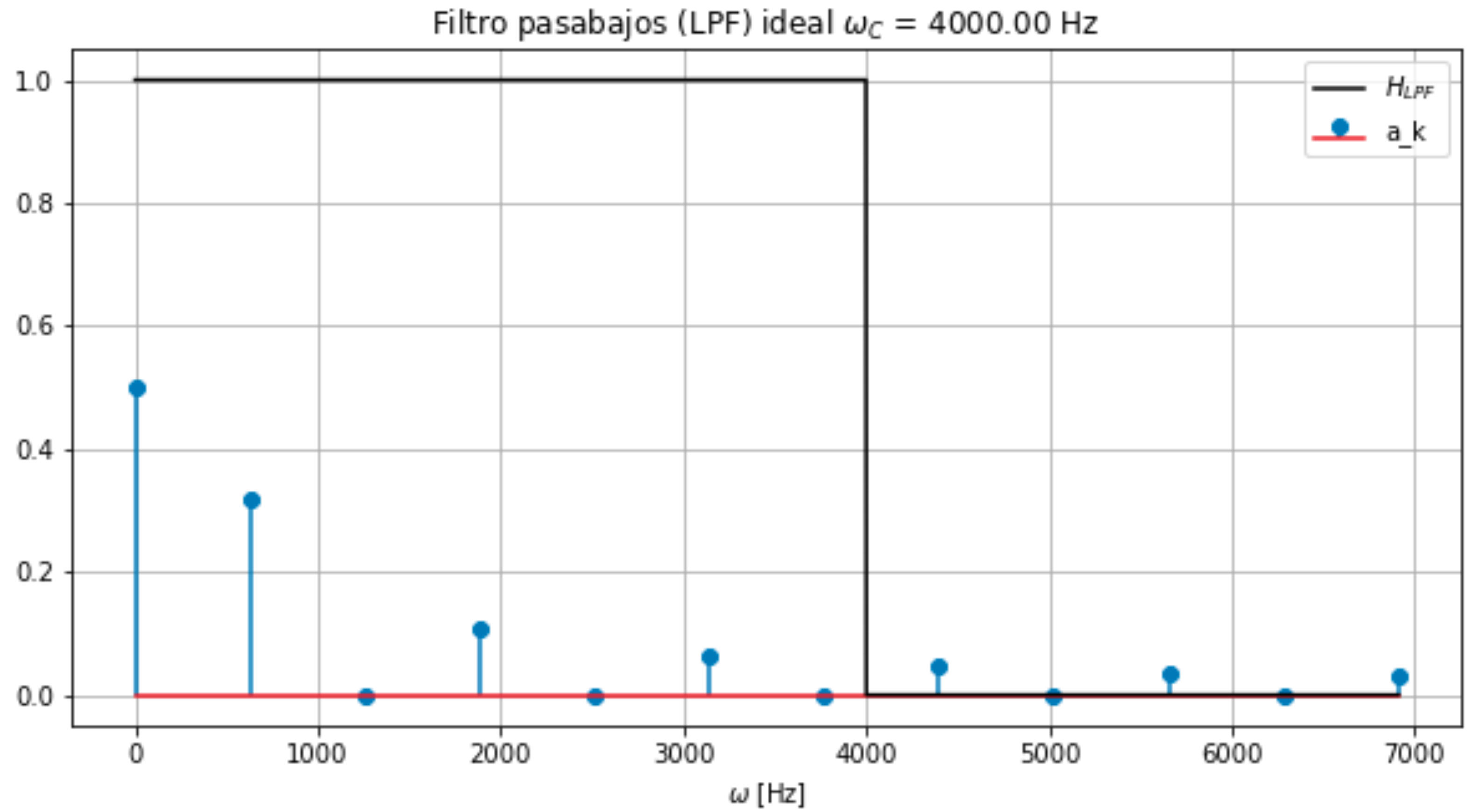


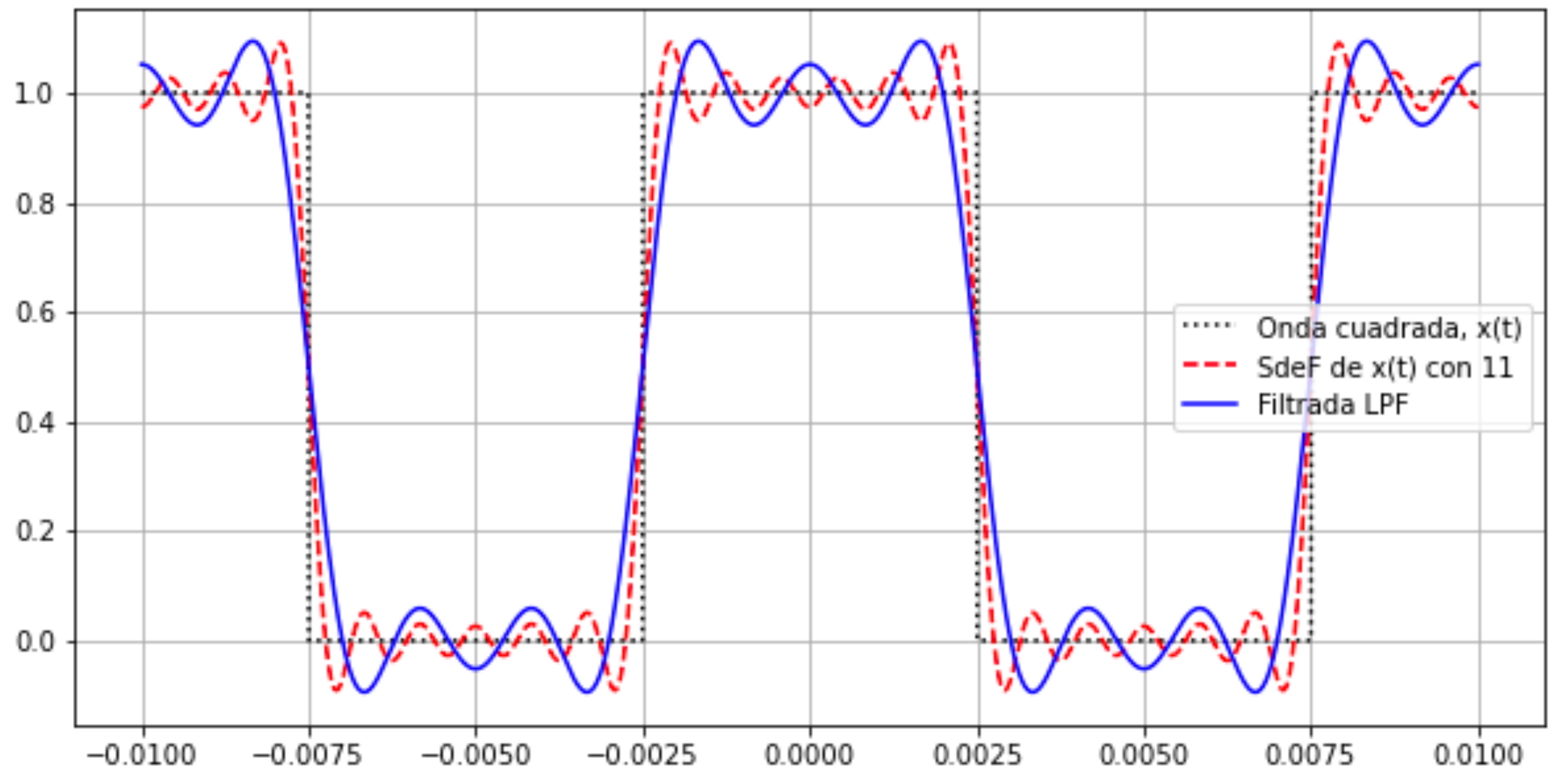
Serie de Fourier: Filtrado



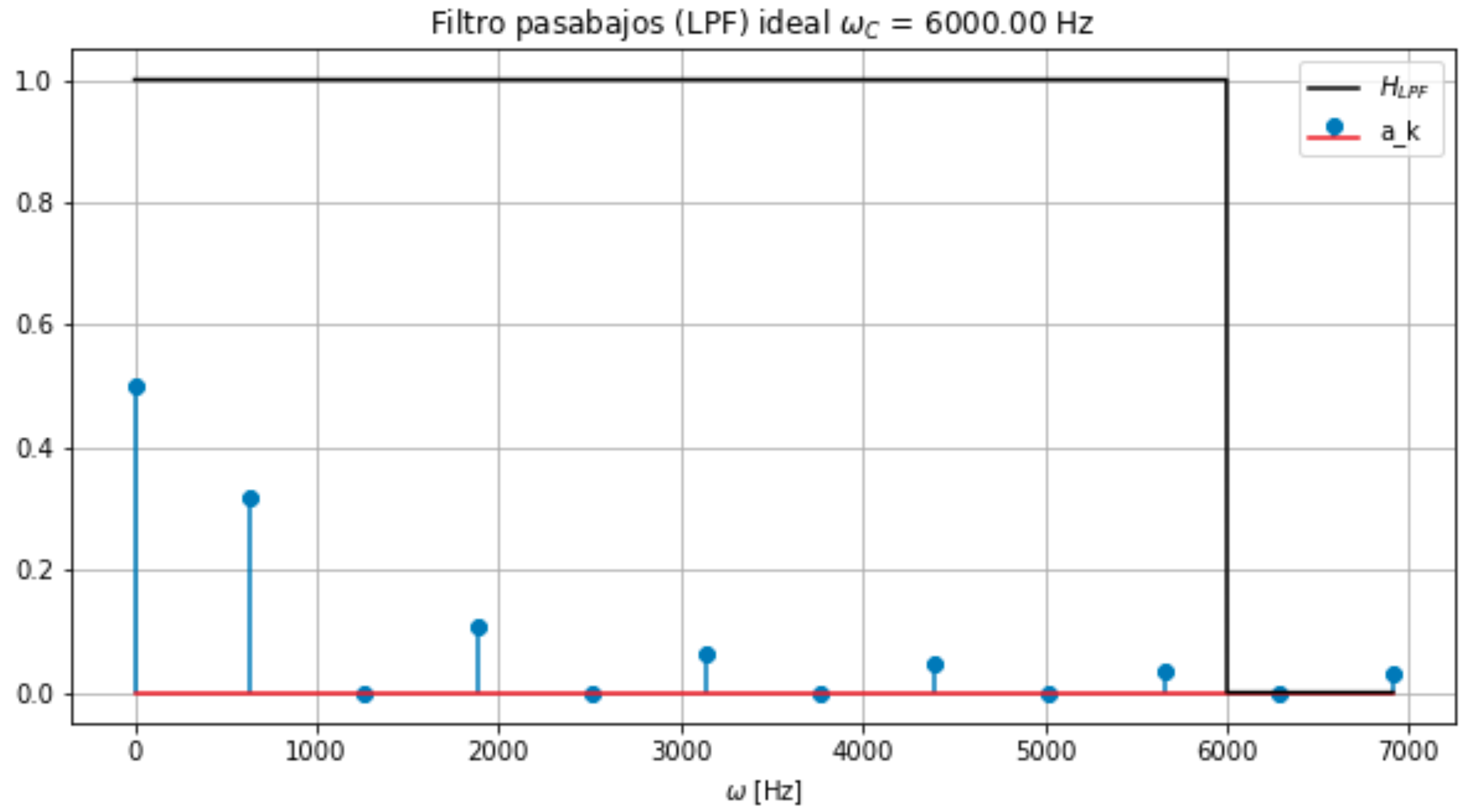


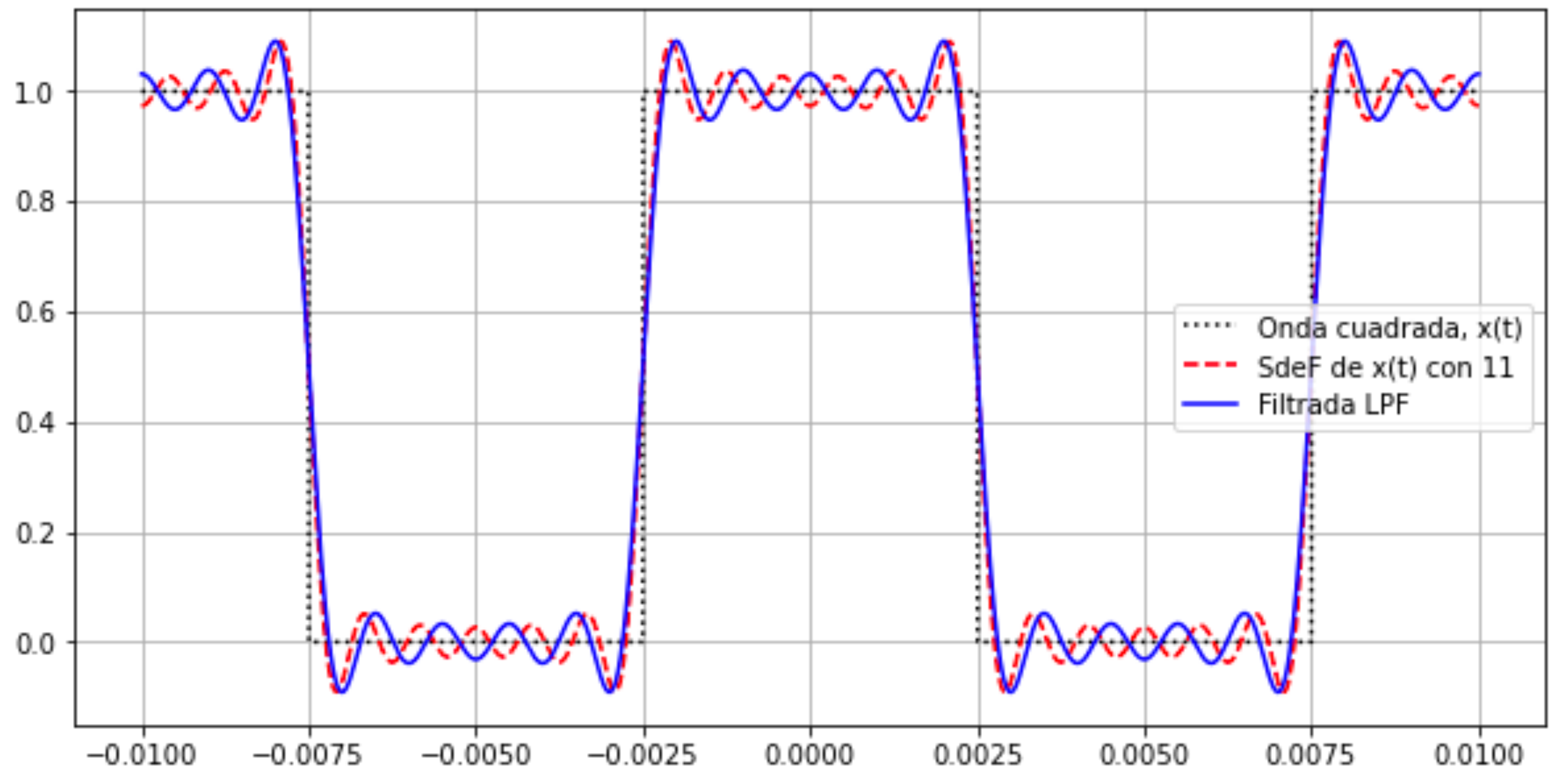
Serie de Fourier: Filtrado



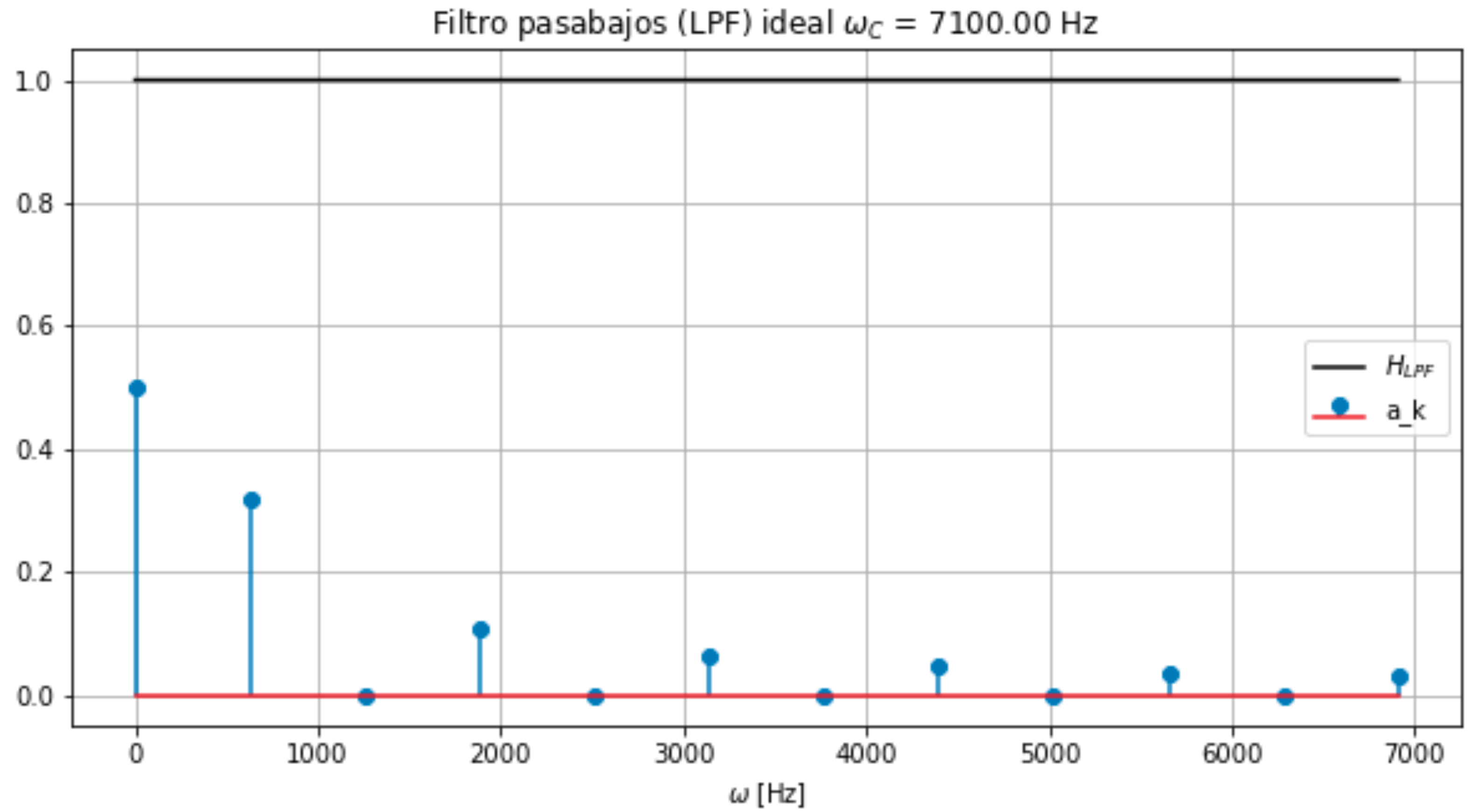


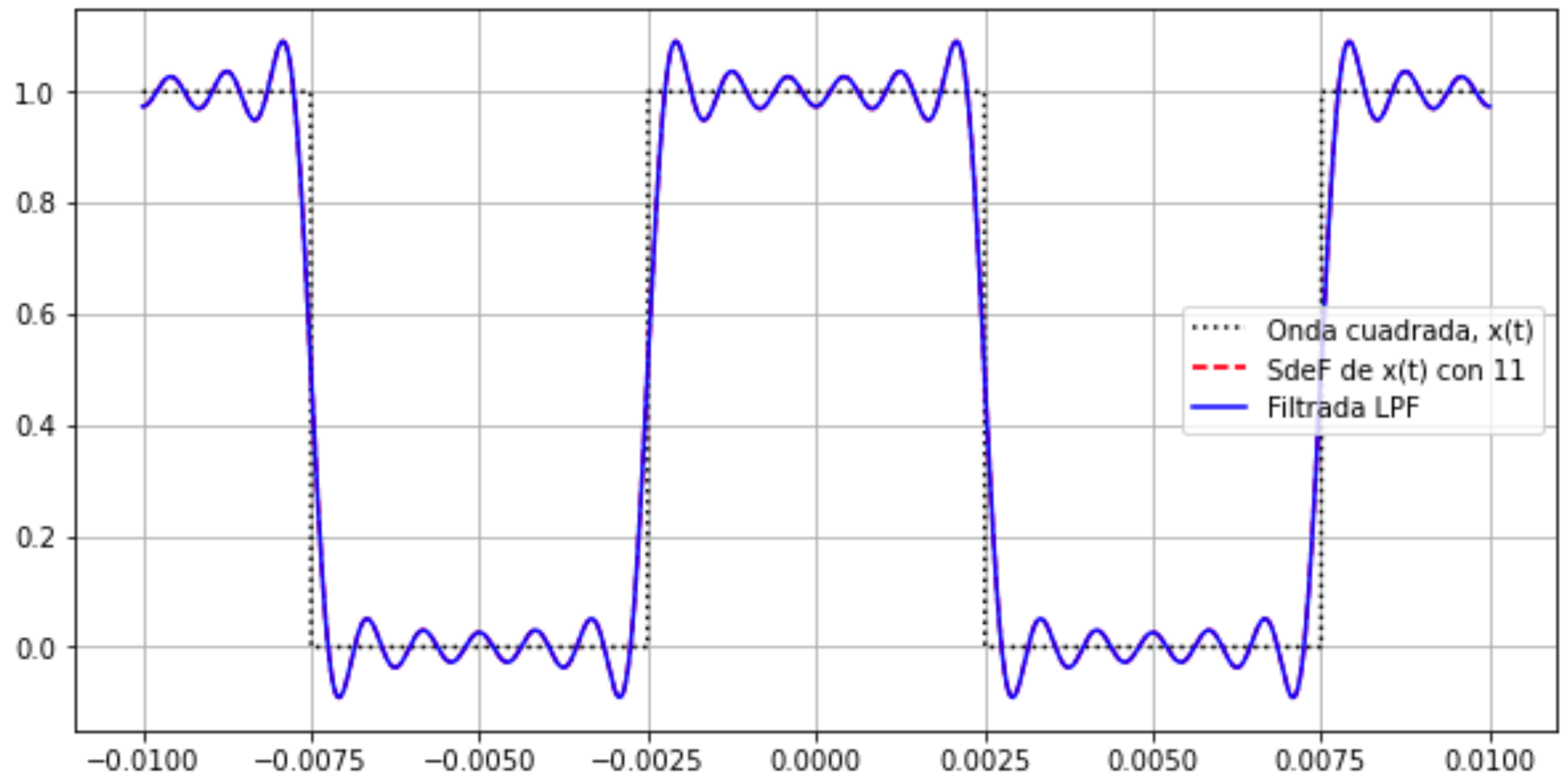
Serie de Fourier: Filtrado





Serie de Fourier: Filtrado





Serie de Fourier: variable discreta

- Lo visto anteriormente también vale para variable discreta con algunas consideraciones.

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{H} y[n] = \sum_k a_k H\left(z_k\right) z_k^n$$

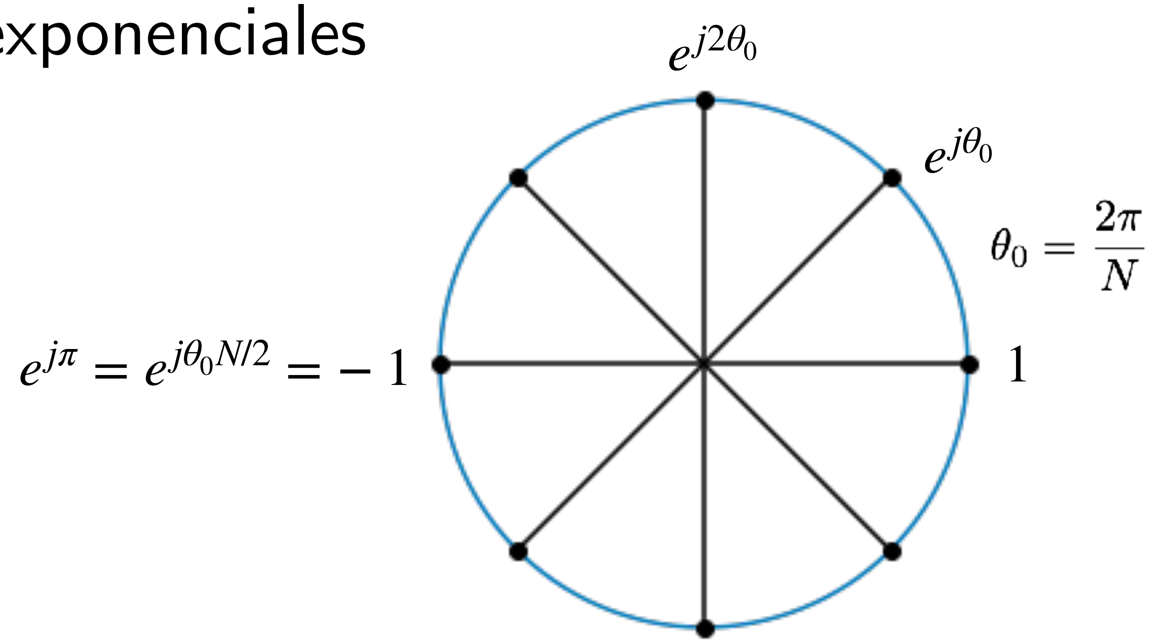
- Para señales periódicas de período N

$$x[m+N] = x[m] \, \forall m$$

- Y se agrega la periodicidad de la base de exponenciales

$$e^{j(\theta_0 + 2\pi)n} = e^{jn\theta_0} \, \forall \theta_0$$

$$e^{j(m+N)\theta_0} = e^{jm\theta_0} \qquad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$



Serie de Fourier: variable discreta

- Para señales periódicas de período N la representación de $x[n]$ en Series de Fourier queda

Serie de Fourier

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\theta_0 n} \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$ Síntesis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\theta_0 n}$$ Análisis

  - Notar que $a_k = a_{(k+N)}$

- Nuevamente vale el producto interno

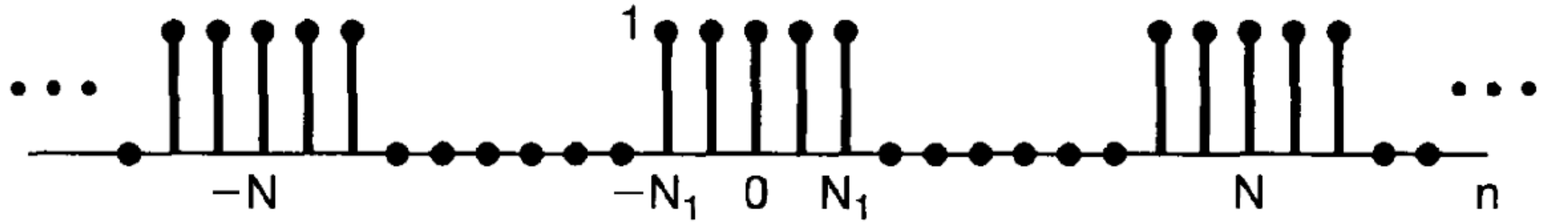
$$\langle x[n], y[n] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y^*[k]$$

$$\langle e^{jl\theta_0 n}, e^{jk\theta_0 n} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(l-k)\theta_0 n} = \begin{cases} 1, & l = k + mN \\ 0, & l \neq k + mN \end{cases}$$

Base ortonormal

Serie de Fourier: variable discreta

- Ejemplo 3.12 (p220)



$$x[n] = 1, -N_1 \leq n \leq N_1 \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\theta_0 n} \qquad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

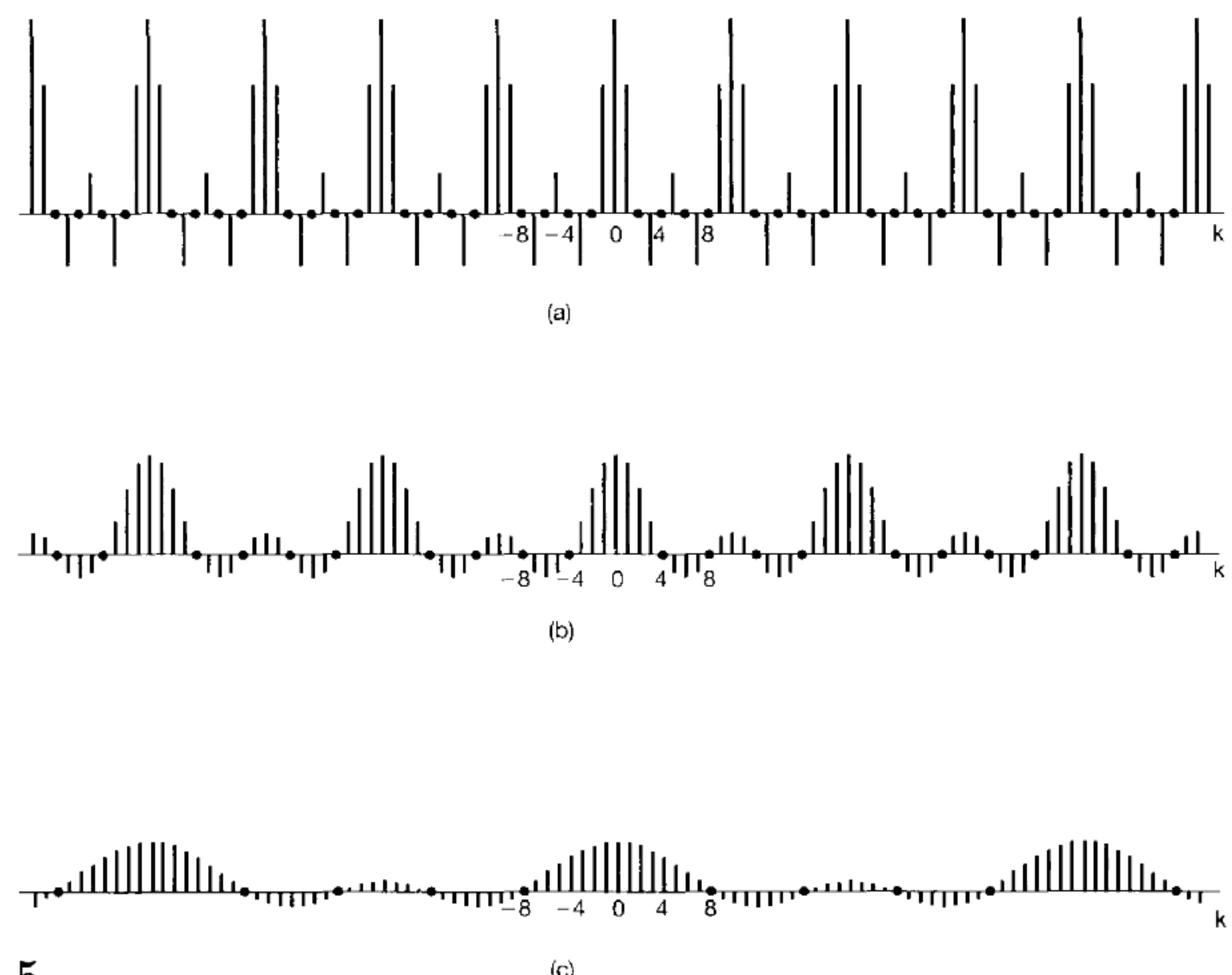
$$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \;\; k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(2\pi k \frac{(N_1+1/2)}{N}\right)}{\sin(\pi k/N)}$$

$N = 10$

$N = 20$

$N = 40$



$2N_1 + 1 = 5$

Serie de Fourier: Identidad de Parseval

Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755 - 1836)

- Relaciona la potencia calcula en el tiempo o en frecuencia

Variable continua $$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} |x(\tau)|^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Variable discreta $$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

Serie de Fourier: propiedades

- $x(t) \overset{\text{SF}}{\longleftrightarrow} a_k$, $y(t) \overset{\text{SF}}{\longleftrightarrow} b_k$ periódicas de período T, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T a_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\dfrac{2\pi}{T} a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\dfrac{1}{jk\omega_0}\right) a_k = \left(\dfrac{1}{jk(2\pi/T)}\right) a_k$

Serie de Fourier: propiedades

- $\begin{array}{l} x[n] \overset{\text{SF}}{\longleftrightarrow} a_k \\ y[n] \overset{\text{SF}}{\longleftrightarrow} b_k \end{array}$ periódicas de período N, $\theta_0 = \dfrac{2\pi}{N}$; a_k y b_k periódicas N.

Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\dfrac{1}{m} a_k \begin{pmatrix}\text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN\end{pmatrix}$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$
First Difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$

* Notación $\omega_0 = \theta_0 = \dfrac{2\pi}{N}$