UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

FACULTAD DE INGENIERIA

IIMPI
INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

Cinemática directa

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2024

Introducción

*La **cinemática** del robot estudia el **movimiento** del mismo con respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que intervienen. Así, la cinemática se interesa por la **descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo**, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.*

[A. Barrientos, 2007]

Espacio operacional

¿Qué formas existen para describir la posición y la orientación **(estado)** de la terminal?

- **Descripción natural:** posición (x, y, z) y orientación (ángulos de Euler, cuaterniones, etc)

  Esto implica que es posible describir el estado de la terminal a partir de una representación mínima a partir de los parámetros inherentes al espacio en el que se mueve el manipulador.

  $$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_e \\ \boldsymbol{\phi}_e \end{bmatrix}$$

  Si es un robot plano son 3 variables independientes , y si su movimiento es tridimensional son 6 variables independientes.

  El vector $\mathbf{x}_e$ está definido en el espacio en el que la terminal realiza la tarea, por lo tanto, suele llamarse ***espacio operacional.***

Espacio articular

¿Qué formas existen para describir la posición y la orientación de la terminal?

- **Descripción articular:** Posición de cada articulación (θ, d)

  Dado que la posición de la terminal es consecuencia de la posición de la cadena cinemática compuesta por los eslabones y las articulaciones. Es posible describir el estado de la terminal del robot, definiendo el estado de cada articulación.

  $$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

  Esta descripción siempre tendrá la misma cantidad de variables que GDL, que a su vez siempre deberá ser mayor o igual a la cantidad de variables de la representación en el espacio operacional.

  El vector ***q*** está definido en el espacio en el que las articulaciones se desempeñan, por lo tanto, suele llamarse ***espacio articular.***

Espacio de trabajo

Con respecto al espacio operacional, una característica muy importante de un manipulador es el **espacio de trabajo.** Esta zona es un subespacio del espacio operacional y suele tener dos definiciones en función del espacio de trabajo al que se hace referencia.

Espacio de trabajo alcanzable (posible): se define como el conjunto de puntos que es capaz de alcanzar el origen del sistema de coordenadas correspondiente a la terminal.

Espacio de trabajo útil: se define como el conjunto de puntos que es posible que el origen del sistema de coordenadas de la terminal alcance en cualquier orientación, o al menos, con la orientación requerida para la tarea específica para la cual fue diseñado.

VIDEO: *https://www.youtube.com/watch?v=_canCYWZPsc*

Redundancia cinemática

Un manipulador se considera ***cinemáticamente redundante*** cuando tiene un número de grados de libertad (DOFs) mayor que el número de variables necesarias para describir una tarea dada.

Intrínsecamente, un manipulador es redundante cuando la dimensión del espacio operativo (m) es menor estricto que la dimensión del espacio articular ($m<n$).

Sin embargo, la redundancia es un concepto relativo a la tarea asignada al manipulador;

Un manipulador puede ser redundante con respecto a una tarea y no redundante con respecto a otra.

Incluso en el caso de $m = n$, un manipulador puede ser funcionalmente redundante cuando solo un número r de componentes del espacio operativo son relevantes para la tarea específica, con $r<m$.

Por ejemplo…

Cinemática

*La cinemática se interesa por la **descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo**, [...] relación entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares. [A. Barrientos, 2007]*

Problema de cinemática directa

La resolución del problema cinemático directo implica la obtención de una expresión que permite conocer cuál es estado de la terminal, para cualquier valor que tomen las variables articulares.

Por ejemplo, si se elige la representación de la orientación a partir de los ángulos de euler, se busca encontrar las siguientes relaciones:

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$
$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$
$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$
$$\phi = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$
$$\theta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$
$$\psi = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

Se utilizan principalmente **dos estrategias** para resolver un problema de cinemática directa.

1. **Métodos geométricos**
2. **Matriz de transformación Homogénea**

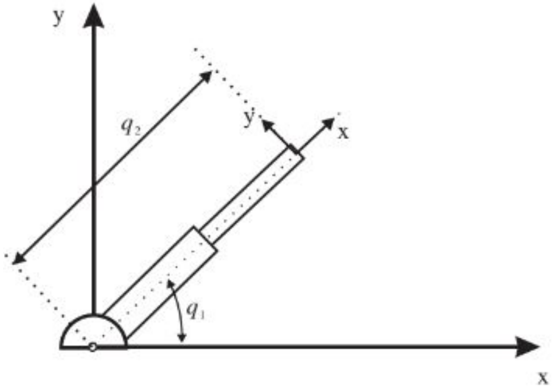
Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

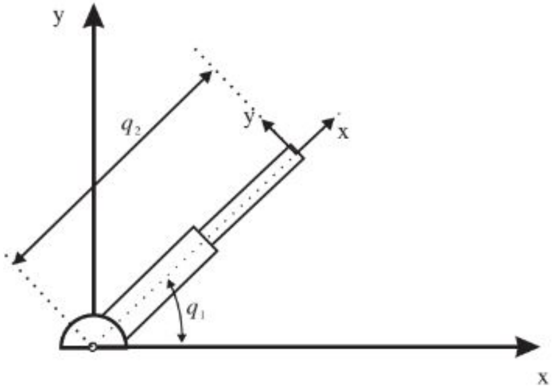
Por ejemplo:



Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Por ejemplo:

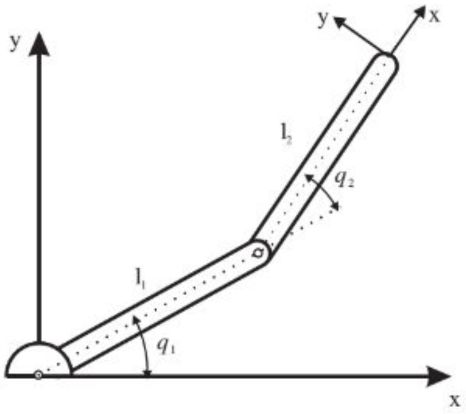


$$x = q_2 \cos q_1$$
$$y = q_2 \operatorname{sen} q_1$$
$$z = 0$$

Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

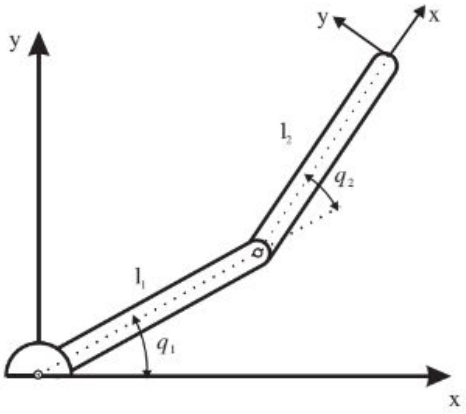
Por ejemplo:



Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Por ejemplo:

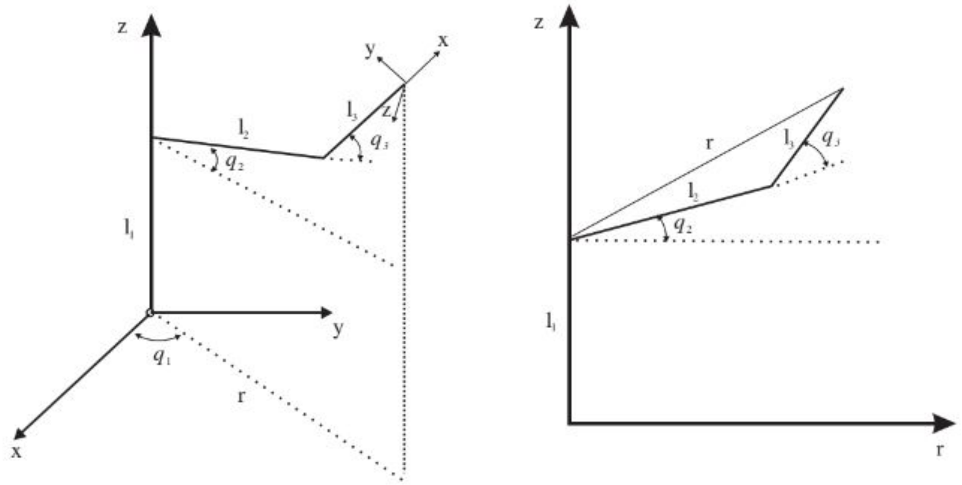


$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$
$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$
$$z = 0$$

Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

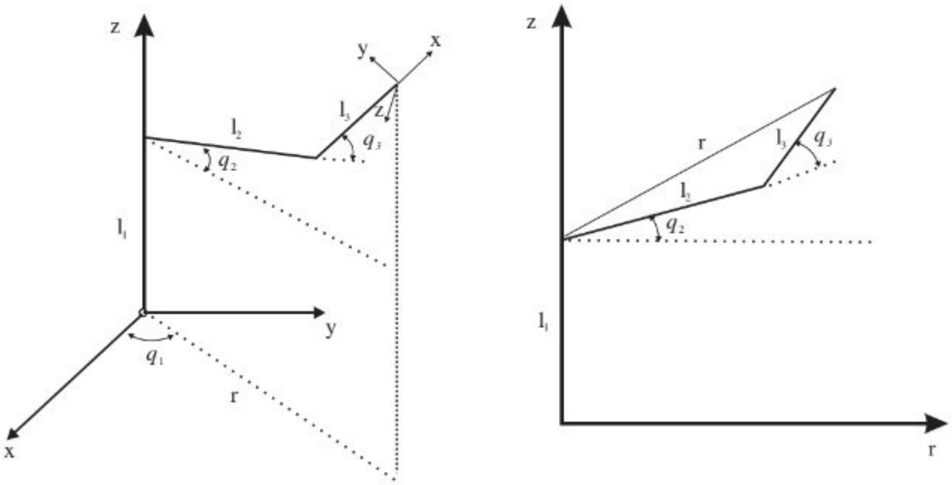
Por ejemplo:



Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Por ejemplo:



$$r = l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

$$z = l_1 + l_2 \operatorname{sen} q_2 + l_3 \operatorname{sen}(q_2 + q_3)$$

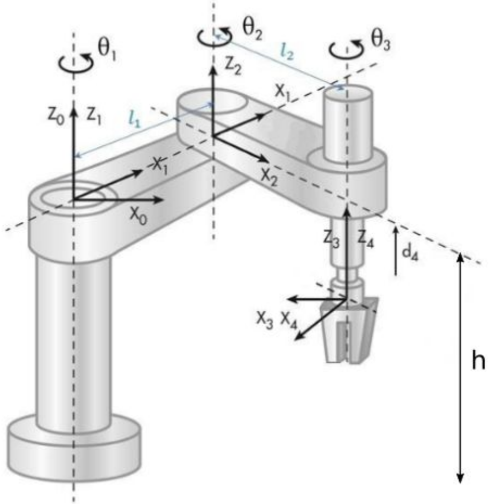
$$x = r \cos q_1$$

$$y = r \operatorname{sen} q_1$$

Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

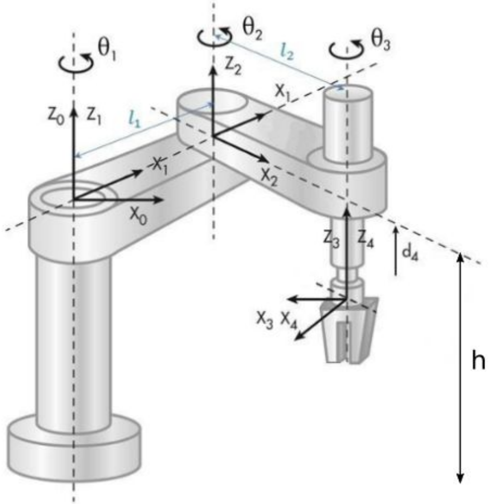
Por ejemplo:



Métodos geométricos

La obtención de estas relaciones en ciertos casos (robots de pocos GDL) puede ser fácil de encontrar mediante simples consideraciones geométricas.

Por ejemplo:



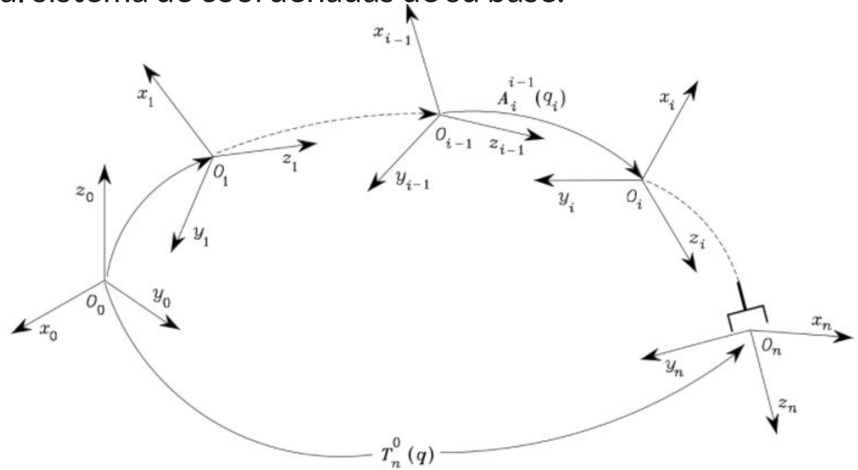
$$
\begin{gathered}
x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
z = h - d_4 \\
\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3
\end{gathered}
$$

Matriz de transformación homogénea

Denavit y Hartenberg propusieron un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de una cadena cinemática, y en particular de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo.

Este método utiliza una **MTH** para describir la relación espacial entre dos elementos rígidos adyacentes.

Problema cinemático directo: Encontrar una MTH que relacione la localización espacial del extremo del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.



Matriz de transformación homogénea

Recordando: La MTH que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot se suele denominar matriz ${}_{i-1}\mathbf{A}_i$.

Entonces, ${}_0\mathbf{A}_1$ describe la posición y orientación del sistema de referencia solidario al primer eslabón con respecto al sistema de referencia solidario a la base.

Recordemos también que vale la composición de MTH, es decir, el estado del sistema de referencia 3 con respecto al sistema de la base puede obtenerse componiendo las MTH consecutivas:

Entonces: ${}_0\mathbf{A}_3 = {}_0\mathbf{A}_1 \times {}_1\mathbf{A}_2 \times {}_2\mathbf{A}_3$

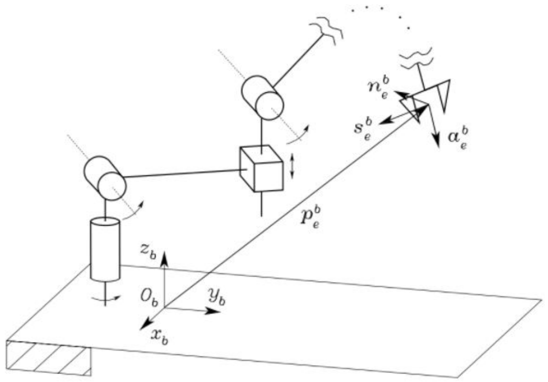
Cuando se consideran todos los grados de libertad, a la matriz ${}_0\mathbf{A}_n$ se le suele denominar **T**. Así, dado un robot de seis grados de libertad, se tiene que el estado del eslabón final vendrá dada por la matriz **T**:

$$\mathbf{T} = {}_0\mathbf{A}_n = {}_0\mathbf{A}_1\ {}_1\mathbf{A}_2\ {}_2\mathbf{A}_3\ {}_3\mathbf{A}_4\ {}_4\mathbf{A}_5\ {}_5\mathbf{A}_6$$

Matriz de transformación homogénea

Esta MTH ***T*** representa el origen del sistema de coordenadas correspondiente al último eslabón (n) en función del sistema de coordenadas de la base, en función de las coordenadas articulares q_i.

Ésta es exactamente la definición de ***cinemática directa.***



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n(\mathbf{q}) & s(\mathbf{q}) & a(\mathbf{q}) & x_e(\mathbf{q}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & y_e(\mathbf{q}) \\ & & & z_e(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posición según *x*

Posición según *y*

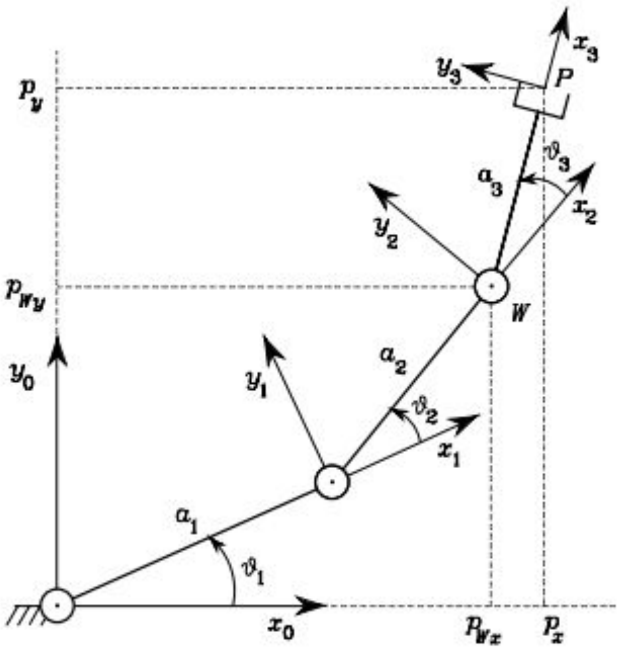
Posición según z

Matriz de rotación que define la orientación del último eslabón con respecto al sistema de la base.

En particular, si el último sistema de referencia está asociado a un gripper suelen definirse **n(q), s(q)** y **a(q)** como *normal*, *slide* y *approach.*

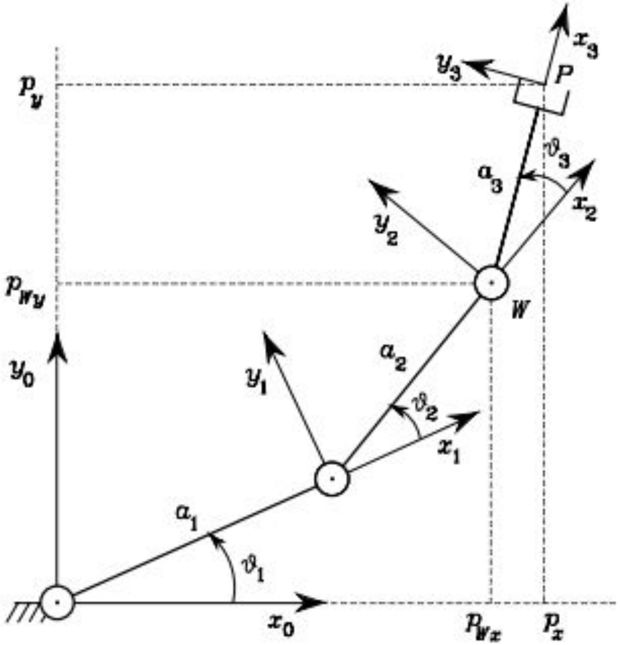
Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Brazo plano de tres eslabones



Matriz de transformación homogénea

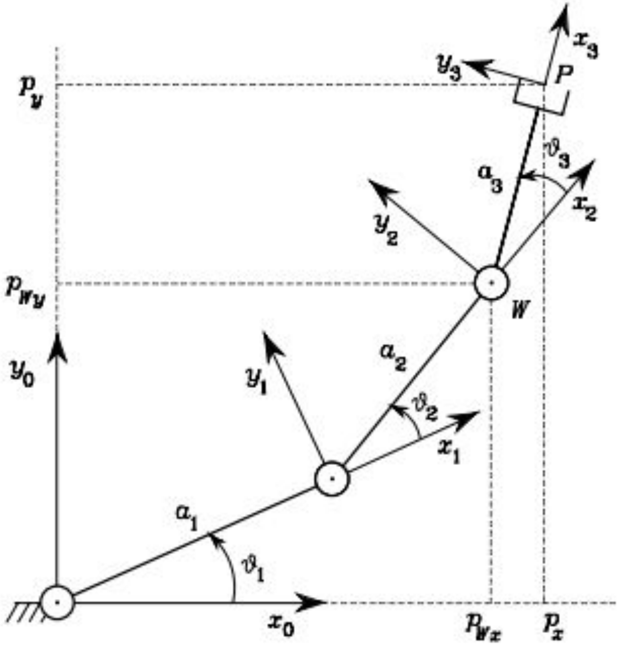
Ejemplos: Brazo plano de tres eslabones



Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Brazo plano de tres eslabones



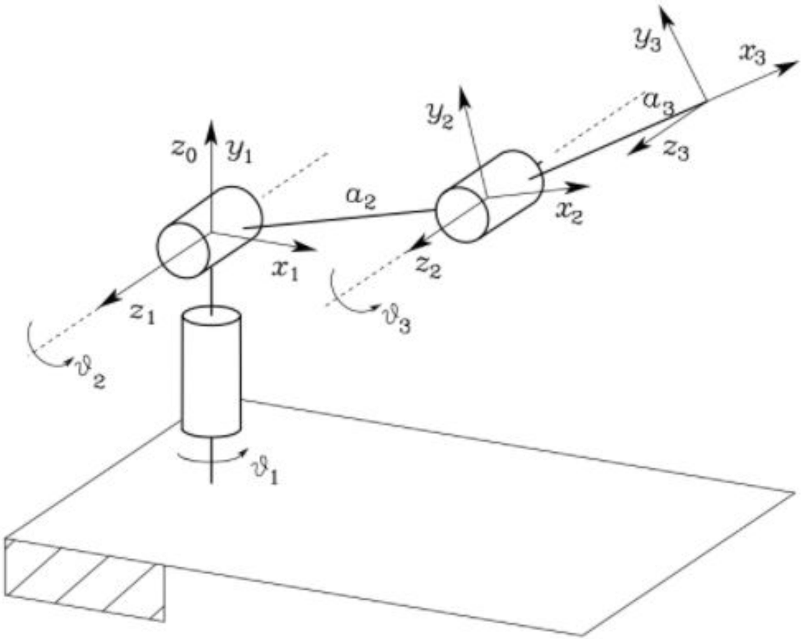
Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$ {}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3. $$

$$ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

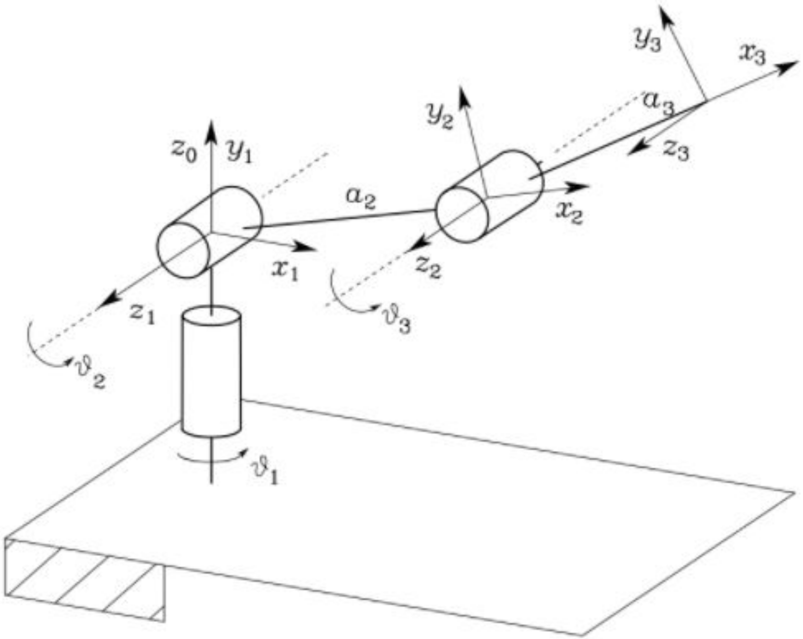
Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Brazo antropomórfico



Matriz de transformación homogénea

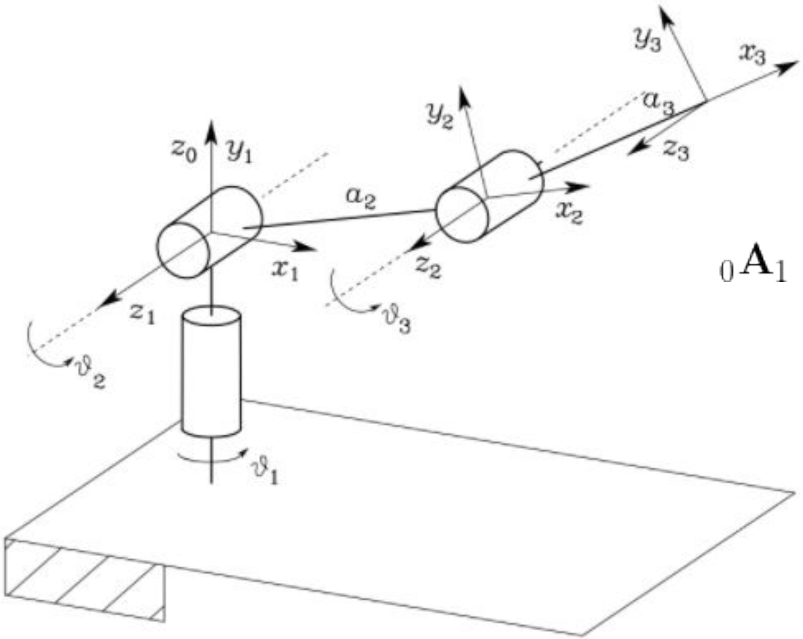
Ejemplos: Brazo antropomórfico



Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Brazo antropomórfico



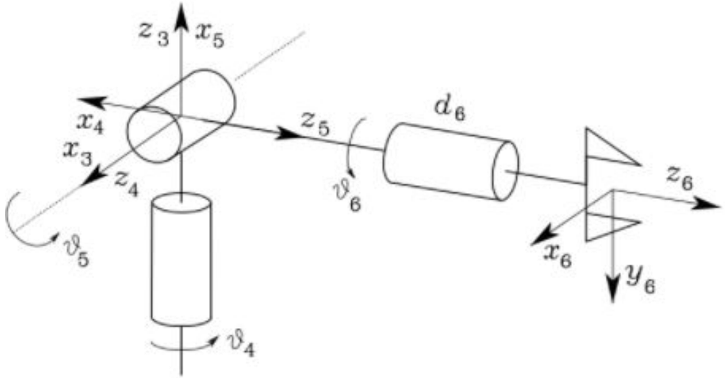
Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$
{}_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad i = 2, 3.
$$

$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

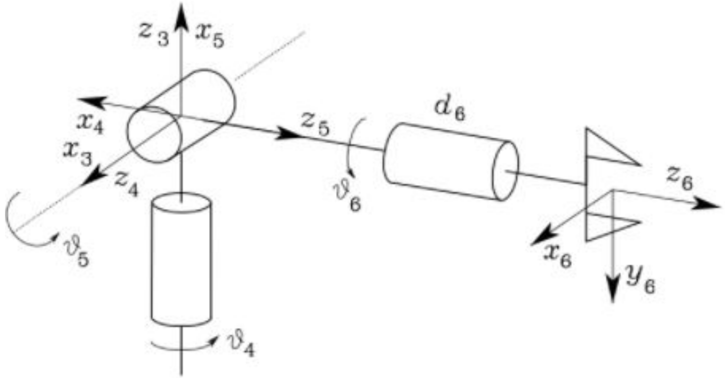
Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Muñeca esférica



Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Muñeca esférica



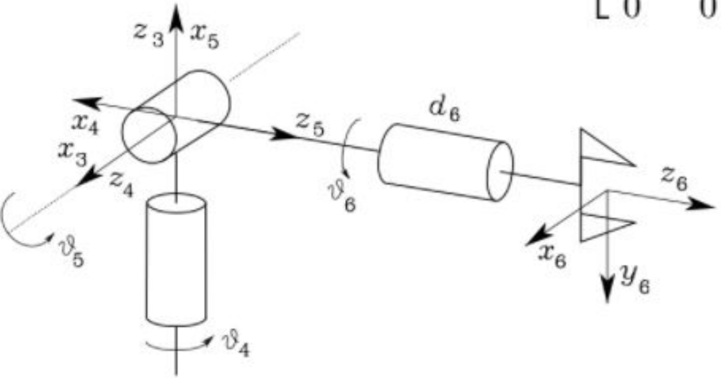
Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

Matriz de transformación homogénea

Ejemplos: Muñeca esférica

Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$$
{}_3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_4\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_5\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$



$$
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & c_4s_5 & c_4s_5d_6 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & s_4s_5 & s_4s_5d_6 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 & c_5d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

FIN!