

CLASE 5 - ELU Agotamiento frente a Solicitaciones Normales

En esta clase veremos, a modo de resumen, algunos de los conceptos mostrados en el capítulo 6.1 de la norma UNE EN 1992-1-1, ya tratados en las clases teóricas y que adoptaremos para el desarrollo del trabajo práctico. A partir de lo anterior, continuaremos con el ejemplo utilizado en la clase anterior y realizaremos la verificación del Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales. Se aplicarán conceptos de cursos anteriores, en particular lo referido a ecuaciones de equilibrio en secciones de hormigón, recomendamos el repaso de esta temática.

1. Generalidades

1.1. Criterios de Agotamiento

Como ya se ha detallado en cursos previos de hormigón estructural, la norma UNE EN 1992-1-1 nos indica una serie continua de planos de deformación límite que producen el agotamiento de las secciones frente a Solicitaciones Normales. Lo anterior se conoce como dominios de deformación y se ilustra en la [Figura 31](#).

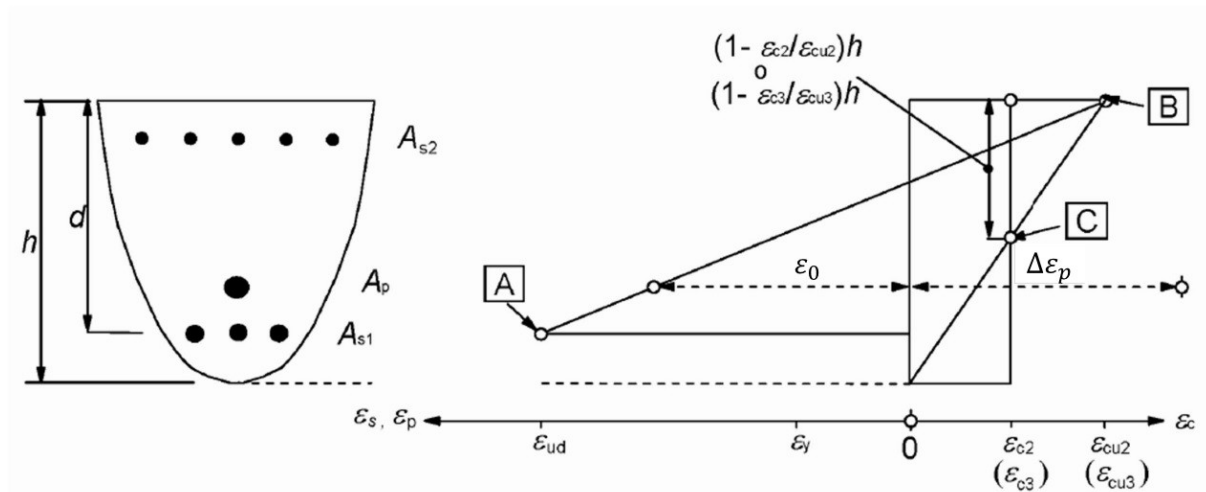


Figura 31: Planos de deformaciones últimas (adaptada de UNE-EN 1992-1-1).

1.2. Ecuaciones constitutivas

Resumidamente mostraremos los diagramas tensión-deformación que se adoptarán en los Estados Límite Últimos para los distintos materiales y para el cálculo de secciones sometidas a sollicitaciones normales.

Ecuación constitutiva Hormigón

El capítulo 3.1.7 de UNE EN 1992-1-1, muestra el diagrama tensión-deformación de cálculo más general del hormigón, el diagrama parábola-rectángulo que se muestra en la [Figura 32](#).

Simplificadamente en el trabajo del curso admitiremos que se adopte el diagrama de cálculo rectangular que también es indicado en el capítulo 3.1.7 y que se muestra en la [Figura 33](#).

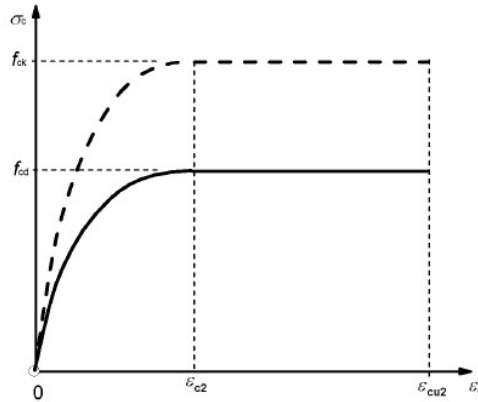


Figura 32: Diagrama de cálculo parábola-rectángulo del hormigón

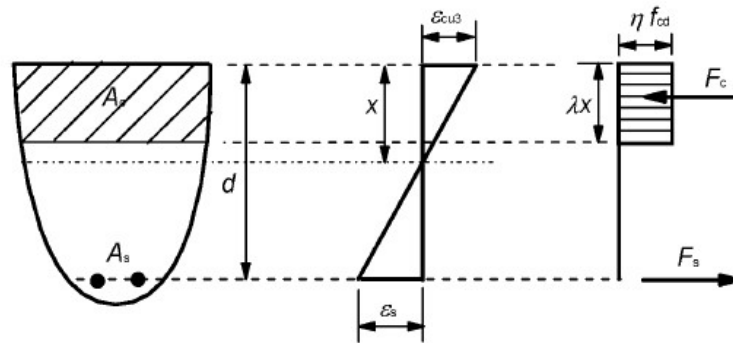


Figura 33: Diagrama de cálculo rectangular del hormigón

Donde para los casos más usuales de $f_{ck} \leq 50$ MPa, se cumple que:

$$\eta = 1,0$$

$$\lambda = 0,8$$

Ecuación constitutiva acero pasivo

El capítulo 3.2.7 de la UNE EN 1992-1-1, muestra el diagrama tensión-deformación de cálculo para el acero de las armaduras pasivas, el cual se muestra en la [Figura 34](#).

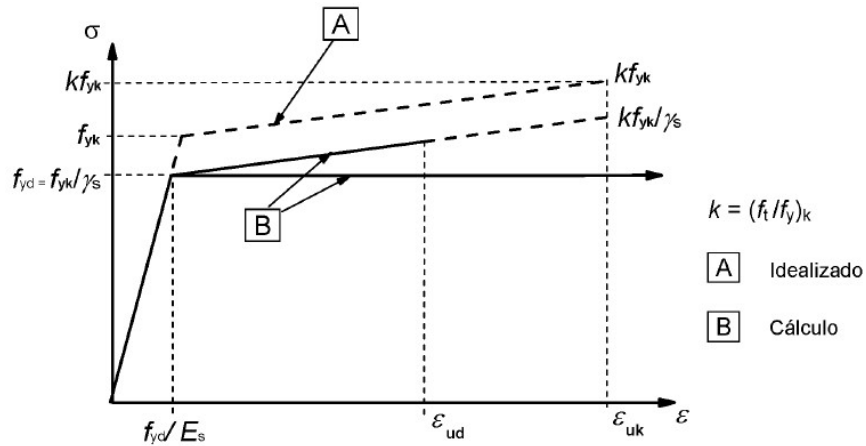


Figura 34: Diagrama tensión-deformación acero pasivo

Para el diagrama tensión-deformación de cálculo para el acero de las armaduras pasivas, al igual que en cursos anteriores de hormigón estructural, tomaremos como primer rama, el tramo lineal según la ley de Hooke hasta f_{yd} , y a partir de f_{yd} una segunda rama horizontal.

Ecuación constitutiva acero activo

El capítulo 3.3.3 de UNE EN 1992-1-1, muestra el diagrama tensión-deformación de cálculo para el acero de las armaduras activas, el cual se muestra en la [Figura 35](#).

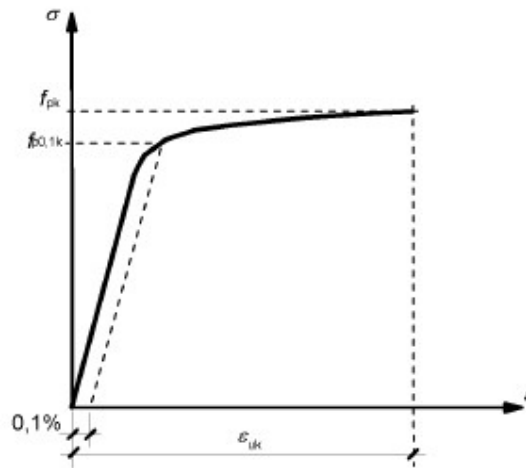


Figura 35: Diagrama tensión-deformación acero activo

En el capítulo 3.3.6 de UNE EN 1992-1-1 se indica que, a los efectos del cálculo de la sección transversal, se puede adoptar el esquema simplificado representado en la [Figura 36](#).

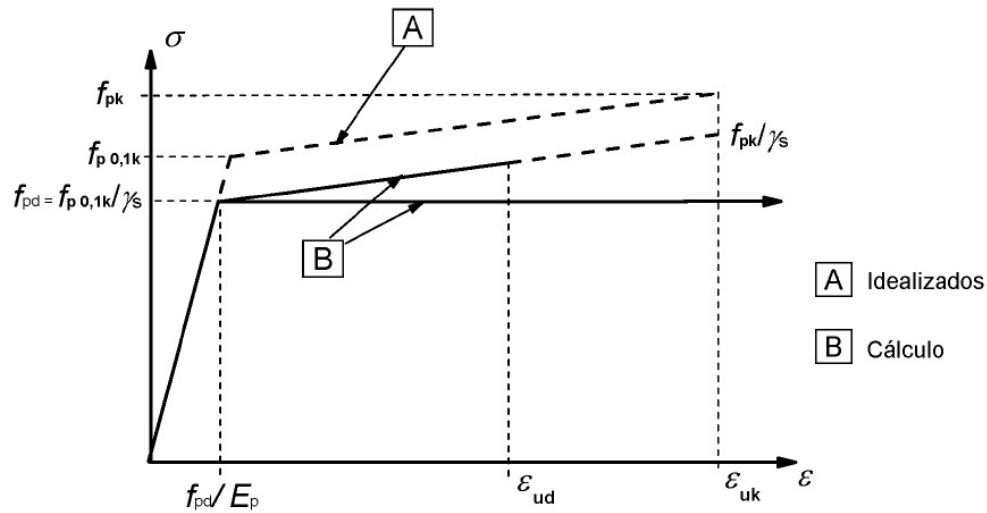


Figura 36: Diagrama tensión-deformación acero activo para el cálculo

Donde se cumple que:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} \quad \text{si } \sigma_p < f_{pd} \quad (15)$$

1.3. Deformaciones de armaduras activas

Las deformaciones totales de las armaduras activas adherentes deben considerar, además de la deformación al nivel de la fibra considerada y correspondiente al plano de deformaciones de agotamiento (ε_0) indicadas en (1.1), la deformación producida por el pretensado y la deformación de descompresión como se muestra en la [Figura 37](#), y según se define a continuación

$$\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \varepsilon_{p0} \quad (16)$$

Donde,

- ε_{cp} , deformación de descompresión del hormigón al nivel de la fibra considerada.
- ε_{p0} , predeformación de la armadura activa debida a la acción del pretensado en la fase considerada, teniendo en cuenta las pérdidas que se hayan producido.

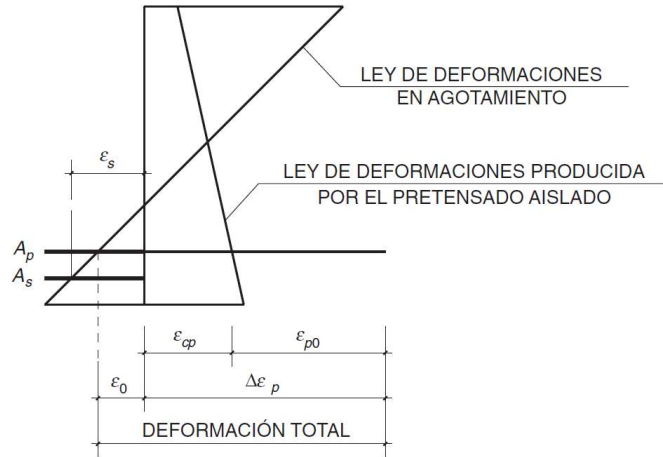


Figura 37: Deformaciones de armaduras activas

1.4. Cuantías mínimas

En el capítulo 9.2.1.1 de UNE EN 1992-1-1 se establece que, para vigas, no se debería disponer de un área de armadura longitudinal inferior a $A_{s,min}$:

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \geq 0,0013 b_t d \quad (17)$$

Donde:

- b_t indica la anchura media de la zona de tensión. Para una viga en T con el ala comprimida solo se considera la anchura del alma para el cálculo del valor de b_t .

Por otro lado, en el Anexo Nacional español se establece que la pieza deberá ser capaz de soportar en ELU el momento de fisuración de la misma, lo cual en piezas con postensado se traduce en la siguiente ecuación:

$$A_p f_{ypd} \frac{d_p}{d_s} + A_s f_{yd} = \frac{W_1}{z} f_{ctm,fl} + \frac{P}{z} \left(\frac{W_1}{A} + e \right) \quad (18)$$

Donde:

- A_p es el área de la armadura activa adherente
- A_s es el área de la armadura pasiva
- f_{ypd} es la resistencia de cálculo del acero de la armadura activa adherente en tracción
- f_{ctm} es la resistencia media a flexotracción del hormigón
- W_1 es el módulo resistente de la sección bruta relativo a la fibra más traccionada
- d_p es la profundidad de la armadura activa desde la fibra más comprimida de la sección
- d_s es la profundidad de la armadura pasiva desde la fibra más comprimida de la sección

Hormigón Estructural 3

- P es la fuerza de pretensado descontadas las pérdidas instantáneas
- A es el área de la sección bruta de hormigón
- e es la excentricidad del pretensado respecto del centro de gravedad de la sección bruta
- z es el brazo mecánico de la sección. A falta de cálculos más precisos puede adoptarse $z=0,8h$.

Nota: cuando fuera necesario controlar la fisuración se debería colocar una cantidad mínima de armadura de acuerdo el capítulo 7.3.2 de la norma UNE-EN 1992-1-1. Este tema se tratará en el curso más adelante.

2. Ejemplo - Cálculos en ELU Solicitaciones Normales

A continuación usaremos los datos del ejemplo utilizado en las clases anteriores indicados en (1.1) y realizaremos la verificación del Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales para la sección central de la viga.

2.1. Momento de diseño

A partir de las solicitaciones obtenidas en (1.2) podemos determinar el momento de diseño para la sección central de nuestra viga,

$$M_d = 1,35 \cdot (M_{pp,v} + M_{pp,p}) + 1,5 \cdot (M_Q) = 1,35 \cdot (460 + 750) + 1,5 \cdot (750) = 2758,5 \text{ kNm}$$

2.2. Ecuación constitutiva acero activo

Para la armadura activa teníamos que:

- $f_{p,k} = 1860 \text{ MPa}$, carga unitaria máxima característica.
- $f_{p01,k} = 0,9f_{p,k} = 1674 \text{ MPa}$, límite elástico característico.

Por lo tanto, tenemos que la resistencia de cálculo de las armaduras activas será,

$$f_{pd} = \frac{f_{p01,k}}{\gamma_s} = \frac{1674}{1,15} = 1456 \text{ MPa}$$

Podemos entonces aplicar la ecuación (15) y obtener el diagrama de cálculo mostrado en la [Figura 36](#).

Se detallan a continuación los valores de referencia que se indican en la misma:

$$\varepsilon_p = \frac{f_{pd}}{E_p} = \frac{1456}{195000} = 7,47 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{ud} = 20 \text{ ‰}$$

2.3. Deformaciones armadura activa

En el apartado (1.3) vimos que la deformación total de la armadura activa adherente se debe a tres componentes de deformación y las mismas se indican con colores en la [Figura 38](#).

Veamos en primer lugar la predeformación de la armadura activa debida a la acción del pretensado ε_{p0} . Se necesita conocer la fuerza de pretensado que está actuando, para ello tenemos el análisis de pérdidas instantáneas realizadas en (1), del cual podemos obtener la fuerza actuante a partir de descontar las pérdidas instantáneas que se dieron en la sección central ($x = L/2$).

$$P_0 = 3100 \text{ kN}$$

$$\Delta P_{\text{inst}}(L/2) = \Delta P_{\mu}(L/2) + \Delta P_{\text{sl}}(L/2) + \Delta P_{\text{el}}(L/2) = 3 + 2,7 + 1,3 = 7,0\%$$

$$P_1 = P_0 - \Delta P_{\text{inst}} = 3100 - 217 = 2883 \text{ kN}$$

A partir de esta fuerza conocemos la predeformación que se le realiza a la armadura activa debida a la acción del pretensado durante el tensado de la siguiente manera,

$$\sigma_p = \frac{P}{A_p} = \frac{2883 \times 10^3}{2100} = 1372,9 \text{ MPa} \rightarrow \varepsilon_{p0} = \frac{1372,9}{195000} = 7,04 \%$$

Además, a partir de la fuerza P_1 determinada anteriormente podemos establecer la ley de deformaciones producida por el pretensado aislado, en particular para la fibra correspondiente a la armadura activa, y a partir de esto conocer la deformación de descompresión del hormigón ε_{cp} .

Tenemos entonces que la tensión de compresión a nivel del centro de gravedad de la armadura activa que produce la fuerza de pretensado aislada actuante es:

$$\sigma_{cp} = -P \cdot \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p^2}{I_c} \right) = -2883 \times 10^3 \cdot \left(\frac{1}{368000} + \frac{428^2}{5962666,7 \times 10^4} \right) = -16,69 \text{ MPa}$$

A partir de esta tensión conocemos la deformación de descompresión del hormigón ε_{cp} ,

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sigma_{cp}}{E_c} = \frac{16,69}{34000} = 0,49 \%$$

Obteniendo a partir de la ecuación (16) que:

$$\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \varepsilon_{p0} = 0,49 + 7,04 = 7,53 \%$$

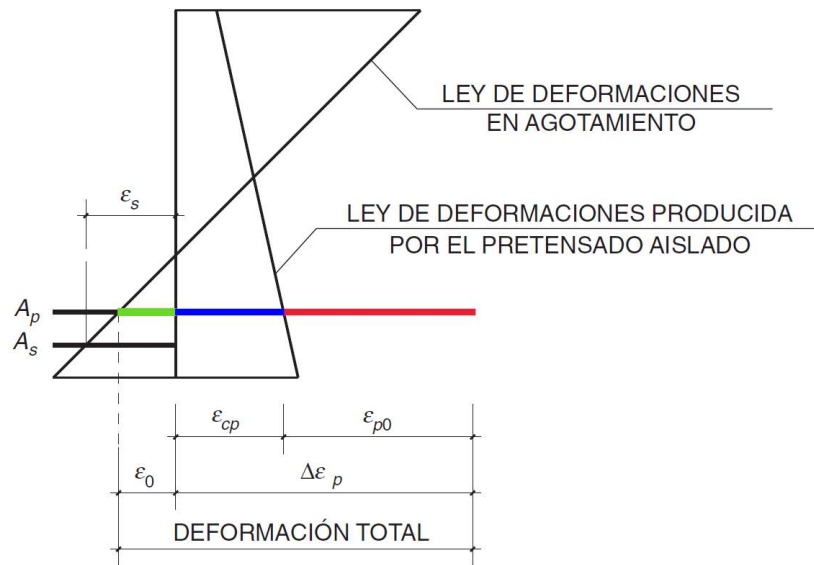


Figura 38: Deformaciones armadura activa

Finalmente para obtener la deformación total de las armaduras activas adherentes debemos conocer la deformación al nivel de la fibra de la armadura activa correspondiente al plano de deformaciones de agotamiento ε_0 , la cual se determinará en la comprobación de la pieza al definir el dominio de deformación en el que estamos,

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \varepsilon_{p0} + \varepsilon_0 = 0,49 + 7,04 + \varepsilon_0$$

2.4. Cuantías mínimas

Previo a realizar la comprobación en Estado Límite Último de la pieza, veremos de cumplir los requerimientos referidos a las cuantías mínimas. La razón de realizar esta verificación antes, se debe a que, independientemente de si necesitamos o no incorporar armadura pasiva para que nuestra pieza cumpla con el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales, debemos cumplir con estas cuantías mínimas, por lo tanto será nuestro armado mínimo. A partir de este armado veremos si es necesario o no incluir una mayor cantidad de armadura para que se verifique el Estado Límite Último de la pieza.

En primer lugar verificaremos la ecuación (17):

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \geq 0,0013 b_t d \rightarrow A_{s,min} = 0,26 \frac{3,2}{500} \times 21 \times 115 \geq 0,0013 \times 21 \times 115$$

$$A_{s,min} = 4,01 \text{ cm}^2 \geq 3,14 \text{ cm}^2 = 4,01 \text{ cm}^2$$

A continuación verificaremos la cuantía mecánica mínima según la ecuación (18) y de acuerdo a la Figura 39. Trabajaremos con unidades de kN y cm.

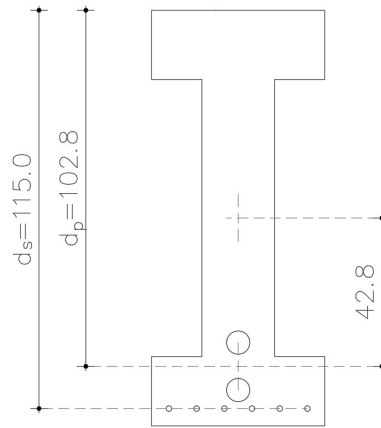


Figura 39: Esquema de armadura activa y pasiva [cm]

$$A_p \cdot f_{ypd} \cdot \frac{d_p}{d_s} + A_s \cdot f_{yd} = 21,00 \cdot 145,6 \cdot \frac{102,8}{115,0} + A_s \cdot \frac{50,0}{1,15} = 2733,2 \text{ kN} + A_s \cdot \frac{50,0}{1,15}$$

$$\frac{W_1}{z} \cdot f_{ct,m,fl} + \frac{P}{z} \left(\frac{W_1}{A} + e \right) = \frac{99377,8}{0,8 \cdot 120} \cdot 0,32 + \frac{2883}{0,8 \cdot 120} \left(\frac{99377,8}{3680} + 42,8 \right) = 2427,6 \text{ kN}$$

Por lo tanto, para cualquier valor de A_s se verifica que:

$$A_p \cdot f_{ypd} \cdot \frac{d_p}{d_s} + A_s \cdot f_{yd} \geq \frac{W_1}{z} \cdot f_{ct,m,fl} + \frac{P}{z} \left(\frac{W_1}{A} + e \right)$$

Se adopta como armadura inferior $6\phi 16$ ($12,06 \text{ cm}^2$) y como armadura superior $4\phi 12$ ($4,52 \text{ cm}^2$).

2.5. Comprobación

De esta manera tenemos definidas las armaduras pasivas para nuestra viga, veamos si esta armadura verifica el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales o si es necesario realizar algún ajuste a la misma.

Comencemos por asumir que la profundidad de la línea neutra “x” es tal que la cabeza de compresión queda contenida en el ala superior de la viga, adicionalmente asumamos que las armaduras están en fluencia. A diferencia del trabajo práctico, en este ejemplo no se cuenta con losa de hormigón.

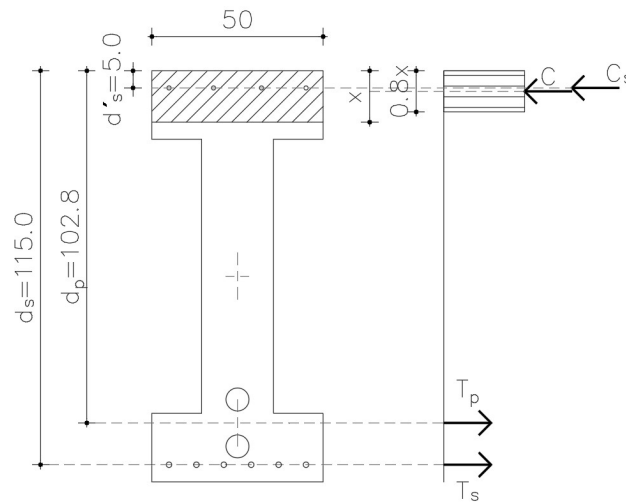


Figura 40: Equilibrio 1 de sección [cm]

Aplicando las ecuaciones de equilibrio en la [Figura 40](#) tenemos que la sumatoria de fuerzas axiales debe ser nula por estar en un caso de flexión simple.

$$C + C_s - T_p - T_s = 0$$

$$0,8x \cdot b \cdot f_{cd} + A_{s,sup} \cdot f_{yd} - A_p \cdot f_{pd} - A_{s,inf} \cdot f_{yd} = 0$$

Trabajando con unidades de kN y cm obtenemos:

$$0,8x \cdot 50 \cdot \frac{3,5}{1,5} + 4,52 \cdot \frac{50}{1,15} - 21,0 \cdot 145,6 - 12,06 \cdot \frac{50}{1,15} = 0 \rightarrow x \cong 36,3 \text{ cm}$$

Por lo tanto no se cumple que la profundidad de la línea neutra esté contenida en el ala superior de la viga.

Realicemos ahora la hipótesis de que la profundidad de la línea neutra “x” es tal que la cabeza de compresión ocupa toda el ala superior y parte del alma de la viga, adicionalmente asumamos que las armaduras están en fluencia.

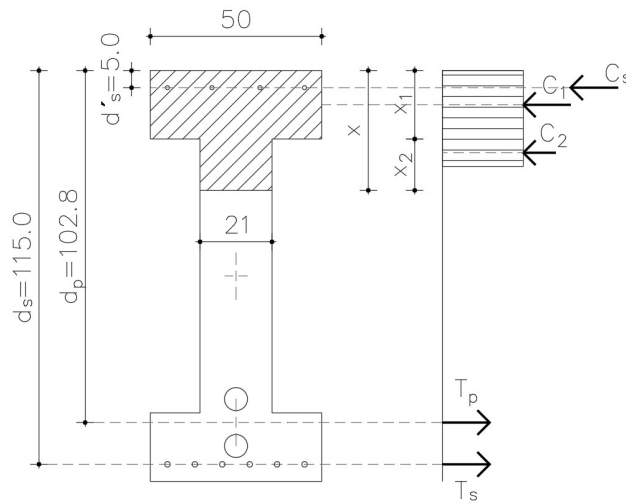


Figura 41: Equilibrio 2 de sección [cm]

Aplicando las ecuaciones de equilibrio en la [Figura 41](#) tenemos que la sumatoria de fuerzas axiales debe ser nula por estar en un caso de flexión simple.

$$C_1 + C_2 + C_s - T_p - T_s = 0$$

$$x_1 \cdot b_1 \cdot f_{cd} + (0,8x - x_1) \cdot b_2 \cdot f_{cd} + A_{s,sup} \cdot f_{yd} - A_p \cdot f_{pd} - A_{s,inf} \cdot f_{yd} = 0$$

Trabajando con unidades de kN y cm tenemos que:

$$(20 \cdot 50 + (0,8x - 20) \cdot 21) \cdot \frac{3,5}{1,5} + 4,52 \cdot \frac{50}{1,15} - 21,0 \cdot 145,6 - 12,06 \cdot \frac{50}{1,15} = 0$$

De donde operando obtenemos que:

$$x \cong 51,5 \text{ cm}$$

Aplicando equilibrio de momentos desde la fibra superior obtenemos que,

$$M_u = T_p \cdot d_p + T_s \cdot d_s - C_1 \cdot \frac{x_1}{2} - C_2 \cdot \left(0,4x + \frac{x_1}{2}\right) - C_s \cdot d'_s$$

$$M_u = 3057,6 \cdot 102,8 + 524,3 \cdot 115,0 - 2333,3 \cdot \frac{20}{2} - 1038,8 \cdot \left(0,4 \cdot 51,5 + \frac{20}{2}\right) - 196,5 \cdot 5,0$$

Obteniendo que:

$$M_u = 3185,4 \text{ kNm} > 2758,5 \text{ kNm} = M_d$$

Por lo tanto se cumple el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales.

A continuación verificaremos la hipótesis asumida de armaduras en fluencia.

$$x/d = 51,5/115,0 = 0,448 < 0,45$$

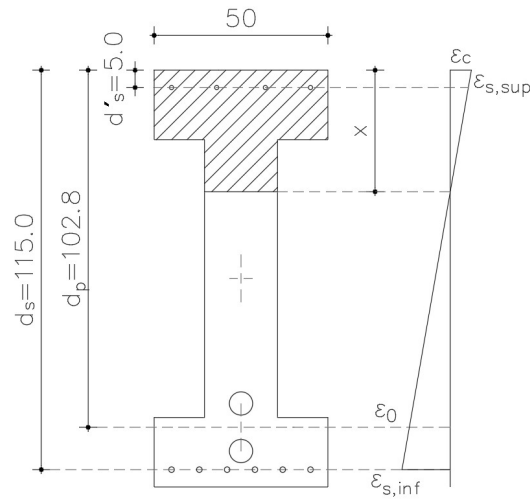


Figura 42: Plano de deformaciones [cm]

Según los planos de deformaciones últimas presentados en la [Figura 31](#), la deformación en el hormigón es:

$$\varepsilon_c = -3,5 \text{ ‰}$$

Mientras que las deformaciones de las armaduras pasivas son:

$$\varepsilon_{s,sup} = 3,5 \cdot \left(1 - \frac{d'_s}{x}\right) = -3,16 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{s,inf} = 3,5 \cdot \left(\frac{1}{x/d} - 1\right) = 4,31 \text{ ‰}$$

Por lo tanto ambas armaduras pasivas cumplen la hipótesis de fluencia.

Por otra parte la deformación al nivel de la fibra de la armadura activa correspondiente al plano de deformaciones de agotamiento ε_0 es:

$$\varepsilon_0 = 3,5 \cdot \left(\frac{1}{x/d_p} - 1\right) = 3,49 \text{ ‰}$$

Obteniendo que la deformación total de las armaduras activas adherentes es (ver [2.3](#)):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \varepsilon_{p0} + \varepsilon_0 = 0,49 + 7,04 + 3,49 = 11,02 \text{ ‰}$$

La deformación total en el acero activo cumple la hipótesis de fluencia y no supera la deformación de rotura. No obstante, como elegimos trabajar con un diagrama bi-lineal sin límite de alargamiento no sería necesaria la comprobación de la deformación de rotura.

A continuación realizaremos algunos comentarios generales para el trabajo y sobre la comprobación de este tipo de elementos para el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales, y los cuales suelen aparecer en instancias de diseño.

- Dado que la viga tratada en este ejemplo es simplemente apoyada, no es necesario comprobar la capacidad de giro de las secciones críticas y por lo tanto no es estrictamente necesario controlar la profundidad de la línea neutra. Por otra parte, es remendable que la falla de la viga sea dúctil y por lo tanto es aconsejable limitar la profundidad de la línea neutra. A lo largo de este curso seguiremos el criterio adoptado por la norma UNE-EN 1992-1-1 de limitar la profundidad de la línea neutra a $0.45 \times d$.

Como complemento se recomienda la lectura del capítulo 36 del libro “Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón - Tomo 2” de J. Calavera y los Capítulos 5.5 y 5.6 de la UNE EN 1992-1-1.

- Para casos en los que se quiera mejorar la ductilidad de la pieza y disminuir la relación x/d , las formas de lograrlo son en general modificando alguna de las siguientes variables,
 - Aumentar la armadura pasiva en compresión.
 - Mejorar la calidad del hormigón.
 - Aumentar el ancho de la cabeza de compresión.
 - Aumentar la altura de la pieza (por condiciones de proyecto no siempre es posible).

Mientras que aumentar la armadura pasiva en compresión implica recalcular el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales, los otros tres posibles ajustes implican además recalcular pretensado y pérdidas de pretensado.

- Si el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales no se logra verificar con las cuantías mínimas se debe proceder a adicionar armadura pasiva hasta lograr que $M_u > M_d$.
- Tener presente que en el trabajo práctico se tiene una sección compuesta donde la losa superior de hormigón colabora en el Estado Límite Último de Agotamiento frente a Solicitaciones Normales y por lo tanto aportará resistencia como cabeza de compresión.
- Para determinar la armadura de piel de la viga se puede seguir lo indicado en el capítulo 14.3 del libro Jiménez Montoya 15ª edición.