

CLASE 4 - Pérdidas

1. Pérdidas instantáneas

A continuación veremos el cálculo detallado de las pérdidas instantáneas para el ejemplo presentado anteriormente. La **Figura 22** muestra en color verde el trazado parabólico adoptado para las dos vainas, mientras que en color rojo se muestra la trayectoria parabólica equivalente de los dos cables y la que utilizaremos simplíficadamente para determinar las pérdidas del conjunto de vainas.

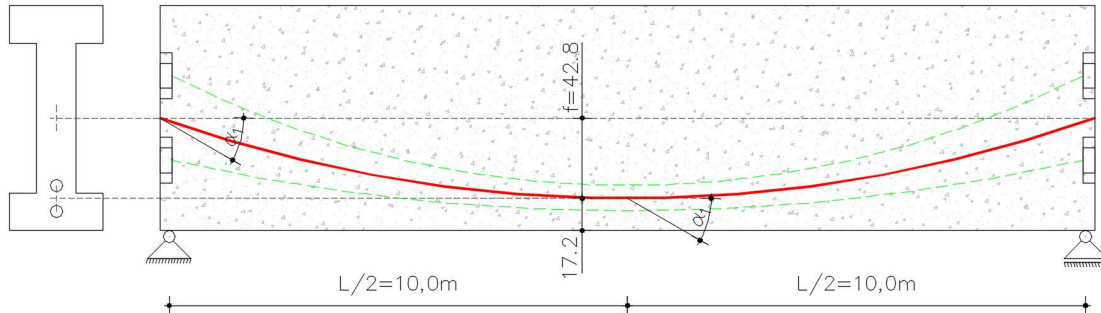


Figura 22: Esquema de trazado parabólico

1.1. Pérdidas por rozamiento (UNE EN 1992-1-1 capítulo 5.10.5.2)

Se producen por la fricción que existe entre los cables y la vaina, y se deben a:

- Trayectoria curva del cable (efecto voluntario, buscado) - Rozamiento en curva.

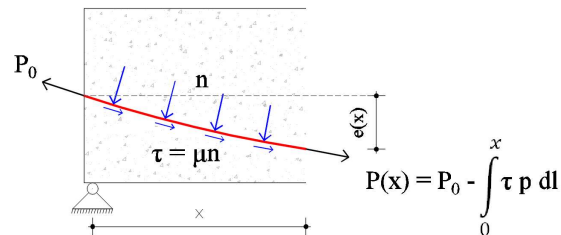


Figura 23: Rozamiento en curva

- Desvíos accidentales e imperfecciones del cable dentro de la vaina que producen contacto entre cables dentro de la vaina (efecto involuntario, no buscado) - Rozamiento parásito.

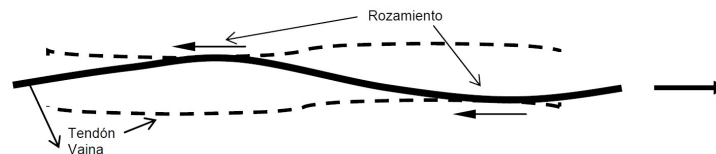


Figura 24: Rozamiento parásito

Hormigón Estructural 3

Según UNE EN 1992-1-1 las pérdidas por rozamiento pueden calcularse de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\Delta P_{\mu}(x) = P_m [1 - e^{-\mu(\theta+kx)}] \quad (9)$$

Donde,

- θ es la suma de las variaciones angulares sobre una distancia x , sin importar la dirección o signo.
- μ , coeficiente de rozamiento entre las armaduras y las vainas (Tabla 5.1).
- k , coeficiente de rozamiento parásito, por unidad de longitud, generalmente en un rango de $0,005 < k < 0,01$ por metro.
- x , distancia medida a lo largo de la armadura desde el punto en el cual la fuerza de pretensado es igual a P_{max} (la fuerza en el extremo activo durante el tesado).

Tenemos entonces que:

- El trazado es parabólico, entonces se conoce a partir de propiedades matemáticas que:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a = \frac{4f}{L^2} = \frac{4 \cdot 0,428}{20^2} = 4,28 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

$$b = -\frac{4f}{L} = -\frac{4 \cdot 0,428}{20} = -8,56 \times 10^{-2}$$

$$\theta(x) = \text{atan}(y'(x)) - \text{atan}(y'(0)) \rightarrow \theta\left(\frac{L}{2}\right) = \text{atan}\left(\frac{4 \cdot 0,428}{20}\right) = 8,54 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

- $\mu = 0,19 \text{ 1/rad}$.

Tabla 5.1 – Coeficientes de rozamiento μ de armaduras postesas internas, y externas no adherentes

	Armaduras internas ¹⁾	Armaduras externas no adherentes			
		Vaina de acero /no lubricado	Vaina HDPE /no lubricado	Vaina de acero/lubricado	Vaina HDPE/ lubricado
Alambre estirado en frio	0,17	0,25	0,14	0,18	0,12
Cordón	0,19	0,24	0,12	0,16	0,10
Barra deformada	0,65	–	–	–	–
Barra redonda lisa	0,33	–	–	–	–

1) Para armaduras activas que ocupan alrededor de la mitad de la vaina.

- Adoptamos $k = 0,0075$, valor medio del rango.

Aplicando la ecuación (9), las pérdidas en la sección central y en la sección opuesta al tensado de la viga serán:

$$\Delta P_{\mu} \left(x = \frac{L}{2} = 10 \text{ m} \right) = 3100 \cdot [1 - e^{-0,19(8,54 \times 10^{-2} + 0,0075 \cdot 10)}] = 93,05 \text{ kN} (\approx 3\%)$$

$$\Delta P_{\mu}(x = L = 20 \text{ m}) = 2 \cdot \Delta P_{\mu} = 183,30 \text{ kN} (\approx 5,9 \%)$$

1.2. Pérdidas por penetración de cuñas (UNE EN 1992-1-1 capítulo 5.10.5.3)

El sistema de anclaje postensado suele emplear anclajes mediante cuñas. En este tipo de sistemas una vez que el gato ha aplicado la fuerza de tensado al cable, ver [Figura 25](#), hay que proceder a anclar el tendón y extraer el gato, este proceso produce un desplazamiento en las cuñas para que estas se claven apropiadamente y puedan anclar la fuerza, ver [Figura 26](#). Este movimiento produce un acortamiento por lo tanto el cable se desplaza en sentido opuesto al alargamiento, y produce un rozamiento negativo que genera una nueva pérdida en la fuerza de pretensado. Para el caso de una viga con trazado parabólico en el que se cumpla $\mu(\theta + kx) \leq 0,3$, la longitud afectada por la penetración de la cuña a partir del anclaje puede calcularse empleando la ecuación (10).

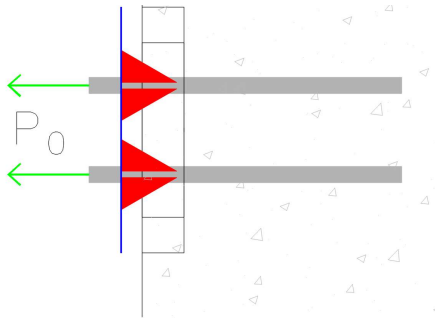


Figura 25: Momento de tensado

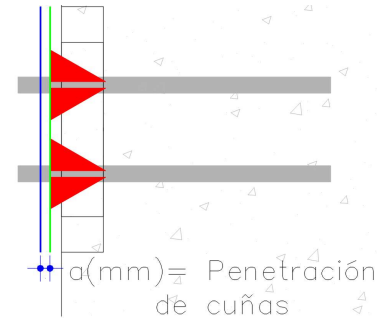


Figura 26: Clavado de cuñas

$$l_x = L \sqrt{\frac{aE_p}{\sigma_{p,max} \mu (8f + kL^2)}} \quad (10)$$

Donde,

- a, valor de penetración de cuñas. Tomaremos a = 5mm.
- $E_p = 195000$ MPa, módulo de elasticidad del acero de pretensado.
- $\sigma_{p,max}$, tensión del pretensado.

Una vez obtenido l_x la pérdida de fuerza de pretensado por penetración de cuñas en el dispositivo de anclaje donde se está aplicando la fuerza de pretensado se halla aplicando la fórmula de pérdidas por rozamiento.

Para la norma UNE-EN 1992-1-1:

$$\Delta P_{sl}(x) = 2P_m [1 - e^{-\mu(\theta_x + kl_x)}] \quad (9)$$

Donde,

- θ_x , es la suma de valores absolutos de las variaciones angulares del cable en l_x .

Tenemos entonces que,

$$\sigma_{p0} = \frac{P_0}{A_p} = \frac{3100 \times 10^3}{2100} = 1476 \text{ MPa}$$

$$l_x = 20,0 \sqrt{\frac{5 \cdot 195000}{1476 \cdot 0,19 \cdot (8 \cdot 428 + 0,0075 \cdot 20,0^2 \cdot 10^3)}} = 14,7 \text{ m}$$

Utilizando las propiedades matemáticas del trazado parabólico tenemos que,

$$\theta(l_x) = \theta_x = 12,4 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

Aplicando la ecuación (9) se obtiene la pérdida de fuerza de pretensado por penetración de cuñas en el dispositivo de anclaje ($x = 0$),

$$\Delta P_{sl}(x = 0) = 2 \cdot 3100 \cdot [1 - e^{-0,19(12,4 \times 10^{-2} + 0,0075 \cdot 14,7)}] = 271,92 \text{ kN} (\approx 8,8\%)$$

Luego, asumiendo que el rozamiento que se produce cuando se realiza el tensado tiene el mismo comportamiento que para cuando se da la penetración de cuñas (el deslizamiento ocurre en sentido contrario al del tensado), además de conocer el valor de $\Delta P_{sl}(0)$ y que $\Delta P_{sl}(l_x) = 0$, se puede plantear simplifadamente una aproximación lineal y obtener el valor de la pérdida de fuerza de pretensado por penetración de cuña para cada sección hasta l_c , uniendo dichos valores mediante una línea recta, obteniendo la siguiente expresión,

$$\Delta P_{sl}(x) = \Delta P_{sl}(0) \cdot (l_x - x)/l_x \quad (10)$$

Como complemento de las clases teóricas y de estas notas se recomienda el capítulo 29.3.1-b) del libro “Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón - Tomo 1” de J. Calavera.

Se tiene entonces que, aplicando la ecuación (9) se puede obtener la fuerza de pretensado en cada sección de la viga, luego de ocurridas las pérdidas por rozamiento (ver puntos rojos en [Figura 27](#)). Además, aplicando la ecuación (10) se puede obtener la fuerza de pretensado en cada sección de la viga que se ve afectada por la penetración de cuñas, luego de ocurridas las pérdidas por dicho efecto (ver puntos azules en [Figura 27](#)).

Obteniendo en promedio una pérdida del 6,2% para la viga, correspondiente a pérdidas por rozamiento y pérdidas por penetración de cuñas.

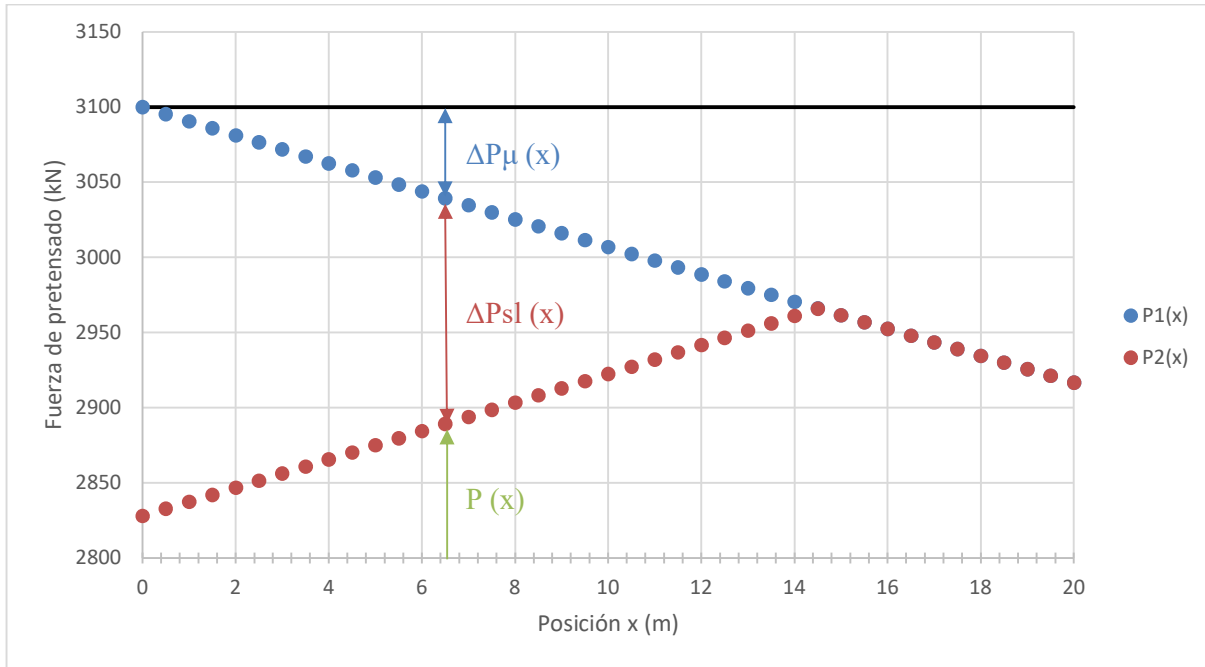


Figura 27: Fuerza de pretensado

1.3. Pérdidas por acortamiento elástico (UNE EN 1992-1-1 capítulo 5.10.5.1)

Se deben al acortamiento del hormigón al introducirle los esfuerzos de compresión del pretensado, el acortamiento de la viga afecta al tendón, ya que este disminuye su longitud, produciendo una nueva pérdida en la fuerza de tensado.

Según UNE EN 1992-1-1, para elementos postensados puede calcularse de acuerdo con la siguiente expresión,

$$\Delta P_{el} = E_p A_p \sum \left[\frac{j \Delta \sigma_c(t)}{E_{cm}(t)} \right] \quad (11)$$

Donde,

- $E_p=195000$ MPa, módulo de elasticidad del acero de pretensado.
- A_p , área total de pretensado.
- $\Delta \sigma_c(t)$ es la variación de la tensión en el centro de gravedad de la armadura activa aplicada a una edad t. Es producida por la fuerza $P = P_0 - \Delta P_{\mu} - \Delta P_{sl}$ (ver gráfica) y fuerzas actuantes en el momento de tensado.

$$\sigma_c = -P \cdot \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p^2}{I_c} \right) + \frac{M_{pp,v}}{I_c} e_p$$

Hormigón Estructural 3

- j es un coeficiente igual a $(n-1)/2n$ donde n es el número de armaduras activas idénticas pretensadas sucesivamente. Para nuestro ejemplo $n=2$.
- E_{cm} , módulo de elasticidad del hormigón al momento de tesado. Para nuestro ejemplo $t_0=28$ días, por lo tanto aplica $E_{c,28}$.

El valor de σ_{cp} varía a lo largo de la viga, tanto por el valor de fuerza de pretensado actuante (ver [Figura 27](#)) como por la posición de los cables, veamos cuáles son sus valores en el tramo central de la viga ($x=10m$) y en el extremo derecho ($x=20m$),

$$\begin{aligned}\sigma_{cp}(10m) &= -2923 \times 10^3 \cdot \left(\frac{1}{368000} + \frac{428^2}{5962666,7 \times 10^4} \right) + \frac{460 \times 10^6}{5962666,7 \times 10^4} \cdot 428 \\ &= -13,6 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_{cp}(20m) = -\frac{2917 \times 10^3}{368000} = -7,9 \text{ MPa}$$

Aplicando la ecuación (11) obtenemos las correspondientes pérdidas por acortamiento elástico,

$$\Delta P_{el}(10m) = 195000 \cdot 2100 \cdot \frac{2-1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{13,6}{34000} = 41,00 \text{ kN} (\approx 1,3 \%)$$

$$\Delta P_{el}(20m) = 195000 \cdot 2100 \cdot \frac{2-1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{7,9}{34000} = 23,86 \text{ kN} (\approx 0,8 \%)$$

Se tiene entonces que, repitiendo lo anterior a lo largo de la viga se puede obtener la fuerza de pretensado en cada sección de la viga, luego de ocurridas las pérdidas por acortamiento elástico (ver puntos naranjas en [Figura 29](#)).

Obteniendo en promedio una pérdida del 1,1% para la viga correspondiente a pérdidas por acortamiento elástico. Finalmente, se obtiene que las pérdidas instantáneas totales son, en promedio,

$$\Delta P_{inst} = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 \cong 7,3\% \rightarrow P_1 \cong 0,93P_0 = 2883 \text{ kN}$$

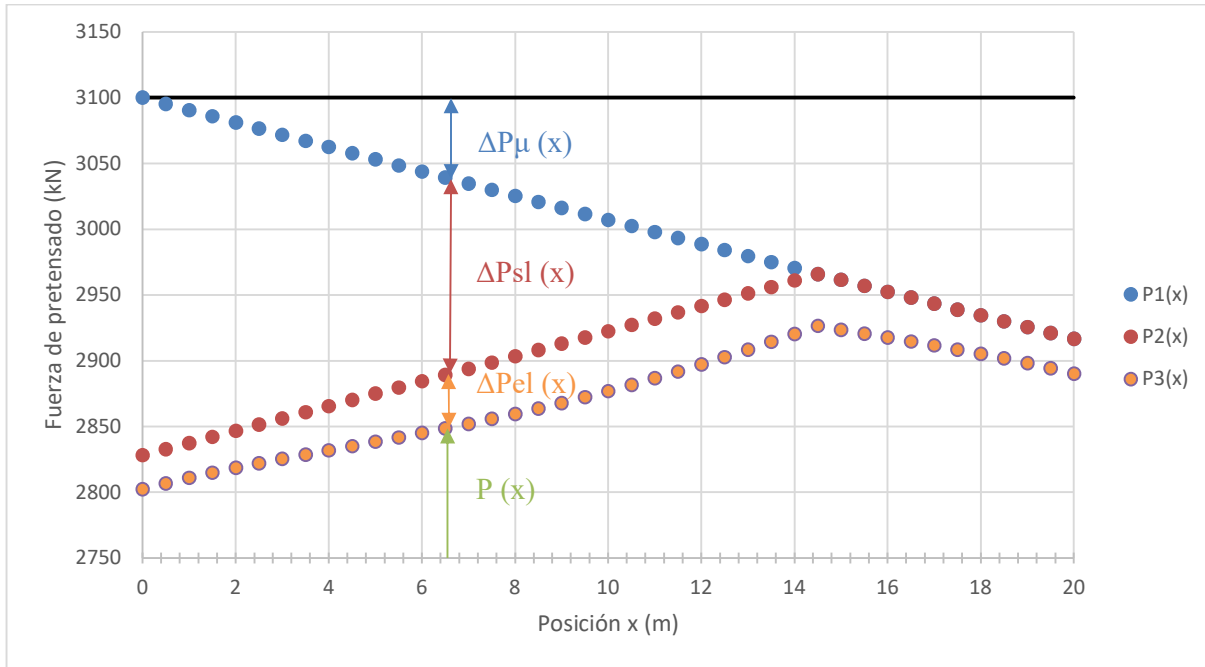


Figura 29: Fuerza de pretensado

2. Pérdidas diferidas (UNE EN 1992-1-1 capítulo 5.10.6)

Se dan luego de anclada la armadura activa y después de haberse producido las pérdidas instantáneas, y son debidas al acortamiento del hormigón (fluencia y retracción) y a la relajación del acero.

Segun UNE-EN-1992-1-1, las pérdidas diferidas pueden calcularse de acuerdo con la siguiente expresión simplificada,

$$\Delta P_{dif} = \frac{n \cdot \varphi(t, t_0) \cdot \sigma_{cp}(t_0) + E_p \cdot \varepsilon_{sh}(t, t_0) - 0,8 \cdot \Delta \sigma_{pr}}{1 + n \cdot \frac{A_p}{A_c} \cdot \left(1 + \frac{A_c e_p^2}{I_c}\right) \cdot (1 + 0,8 \cdot \varphi(t, t_0))} \cdot A_p \quad (12)$$

Donde,

- n , coeficiente de equivalencia ($n = E_p / E_{cm}(t_0)$).
- $\varphi(t, t_0)$, coeficiente de fluencia.
- σ_{cp} , tensión de compresión a nivel del centro de gravedad de la armadura activa producida por la fuerza de pretensado (con pérdidas instantáneas), el peso propio y las cargas muertas.
- ε_{sh} , deformación por retracción que ocurre luego del tensado.
- $\Delta \sigma_{pr}$, pérdida por relajación a longitud constante del pretensado.
- A_p , área total de pretensado.
- A_c , área de la sección de hormigón.
- e_p , distancia del centro de gravedad del pretensado al centro de gravedad de la sección.
- I_c , inercia de la sección de hormigón.

No daremos mayor detalle de como determinar los valores de fluencia y retracción, asumimos que el estudiante tiene las herramientas suficientes para hacerlo, con lo dictado en cursos anteriores, en el teórico de este curso y con la lectura del marco normativo UNE-EN-1992-1-1.

- $\varphi(t, t_0) = 1,54$
- $\varepsilon_{sh}(t, t_0) = -2,8 \times 10^{-4}$
- Las pérdidas por relajación se determinarán según el capítulo 3.3.2 de UNE EN 1992-1-1. Adoptaremos la ecuación para cordones de baja relajación:

$$\Delta\sigma_{pr} = 0,66 \rho_{1000} e^{9,10 \mu} \left(\frac{t}{1000} \right)^{0,75(1-\mu)} \times 10^{-5} \times \sigma_{pi}$$

Según datos del proveedor tenemos que la relajación a 1000h es $\rho_{1000} = 2,5\%$.

$$\sigma_{pi} = P_1/A_p = 2883 \text{ kN} / 2100 \text{ mm}^2 = 1373 \text{ MPa}$$

$$\mu = \sigma_{pi} / f_{pk} = 1373 \text{ MPa} / 1860 \text{ MPa} = 0,738$$

Adoptamos $t = 50$ años = 438000 hs.

$$\Delta\sigma_{pr} = 0,66 \times 2,5 e^{9,10 \times 0,738} \left(\frac{438000}{1000} \right)^{0,75(1-0,738)} \times 10^{-5} \times \sigma_{pi} = 0,045 \sigma_{pi} = 61,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cp} = -P_1 \cdot \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_p^2}{I_c} \right) + (M_{pp,v} + M_{pp,p}) \frac{e_p}{I_c}$$

$$\sigma_{cp} = -2877 \times 10^3 \cdot \left(\frac{1}{368000} + \frac{428^2}{5962666,7 \times 10^4} \right) + (460 + 750) \times 10^6 \cdot \frac{428}{5962666,7 \times 10^4} = -7,97 \text{ MPa}$$

Aplicando la ecuación (12) obtenemos que,

$$\Delta P_{dif} = \frac{-5,735 \cdot 7,97 \cdot 1,54 - 195000 \cdot 2,8 \times 10^{-4} - 0,8 \cdot 61,83}{1 + 5,735 \cdot \frac{2100}{368000} \cdot \left(1 + \frac{368000 \cdot 428^2}{5962666,7 \times 10^4} \right) \cdot (1 + 0,8 \cdot 1,54)} \cdot 2100 = 3717,55 \text{ kN}$$

Por lo tanto, obtenemos que la pérdida diferida es aproximadamente del 10%.

$$P_2 = P_{inf} \cong 0,8P_0 = 2480 \text{ kN}$$

A continuación realizaremos algunos comentarios generales sobre aspectos específicos para este tipo de elementos a ser considerados en el trabajo práctico.

- Si bien en el ejemplo se trabajó simplificada e ilustrativamente con dos cables uno encima de otro, la práctica usual, y lo que se deberá aplicar en el trabajo práctico, es un trazado de manera tal que los cables en la sección central estén alineados horizontalmente y en la sección de extremo alineados verticalmente, en el extremo se deben cumplir con los requerimientos de separación mínima entre anclajes de acuerdo a datos del proveedor. Definidas estas dos secciones, la trayectoria de los cables en el espacio deberá ser resuelta de manera de que en todo punto se verifiquen las separaciones y recubrimientos mínimos.

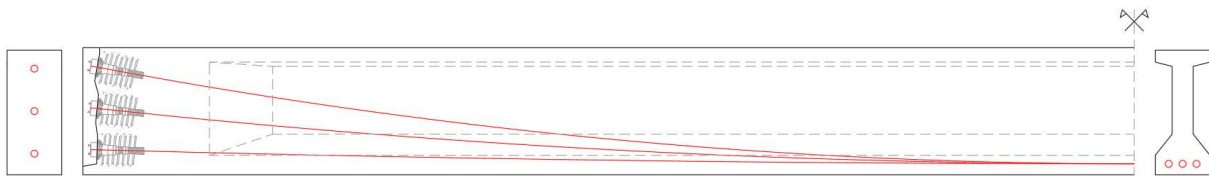


Figura 30: Esquema de trazado

- Para el trabajo práctico y por tratarse de una sección compuesta la fórmula simplificada de la UNE-EN 1992-1-1 para evaluar las pérdidas diferidas es válida solo para el primer intervalo de tiempo en el que la losa de hormigón no se ha ejecutado. Para el intervalo posterior al hormigonado de la losa se deberán evaluar las pérdidas diferidas siguiendo la formulación mostrada en el teórico.