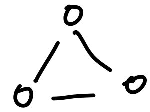


$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$$P(K_n,\lambda) = \frac{\lambda!}{(\lambda-n)!}$$

$$P(\overline{K_n},\lambda) = \lambda^n$$

Ejercicio 12 Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y solo si G no tiene ciclos impares.

C_n subgrafo de G n impar $\Rightarrow \chi(G) \geq 3$

$$P(C_n,\lambda) = (\lambda-1)^n \underbrace{-}_{n \text{ impar}} (\lambda-1)$$

Con esto acabamos de probar

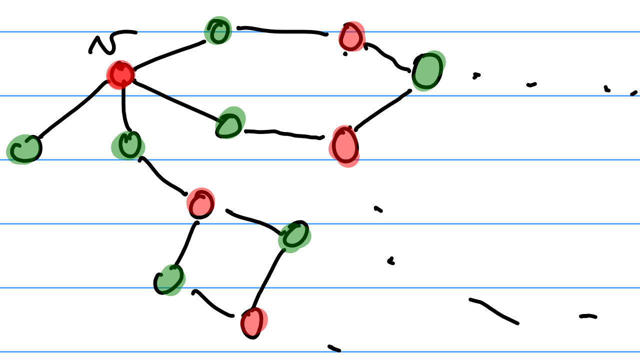
Si $\chi(G) \leq 2 \Rightarrow$ G no tiene ciclos impares

Si G no tiene ciclos impares $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$

Dem:

Vamos a suponer sin perdida de generalidad que G es conexo

Sea $v \in G$ un vertice

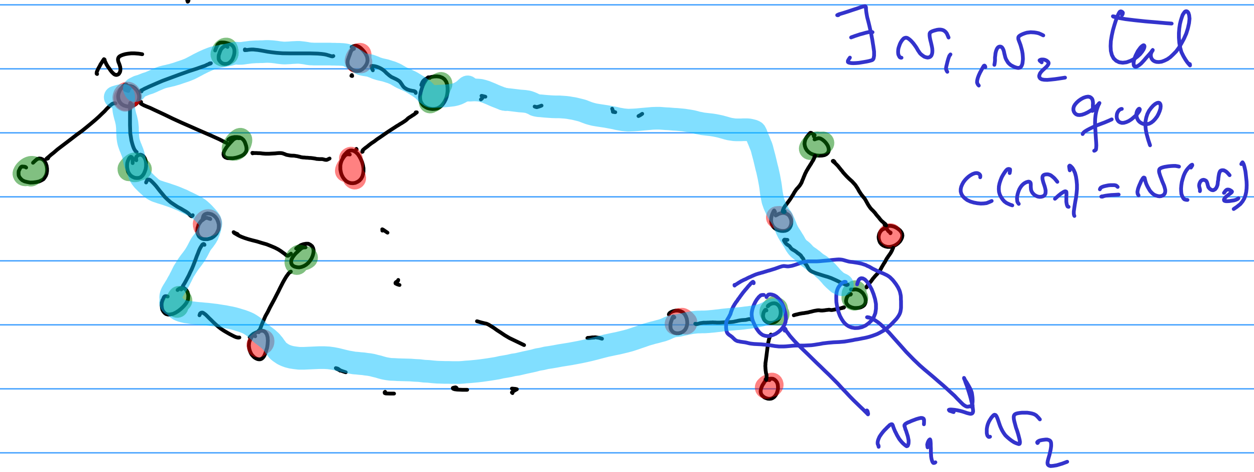


Definimos $c: V \to \{1,2\}$

$$c(u) = \begin{cases} 1 & d(u,v) \text{ es par} \\ 2 & d(u,v) \text{ impar} \end{cases}$$

Afirmación c es una 2-coloración

Supongamos que no lo es:



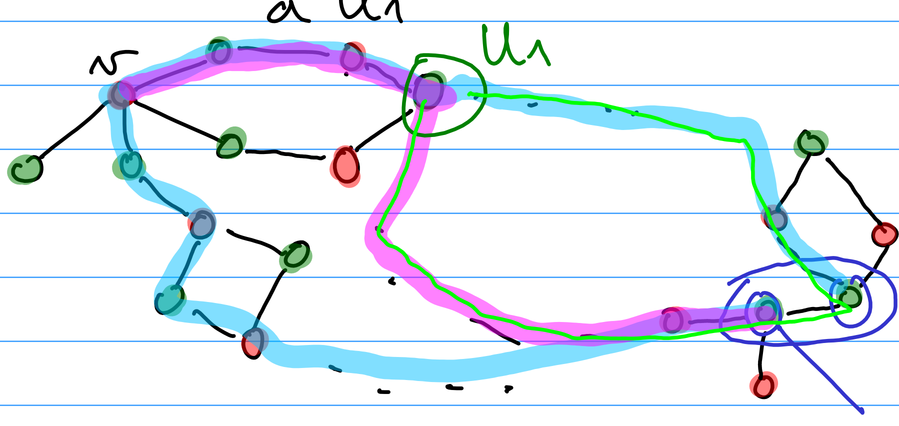
Esto implica que hay un ciclo impar en G y esto es absurdo.

de v a v_1 hay un recorrido de largo k_1

v a v_2 " " " " k_2

Al unir estos caminos desde u_1, siendo u_1 la intersección de los caminos más lejana a v

Vamos a poder cerrar un ciclo desde u_1 hasta v_1 luego v_2 y volver a u_1



El largo de este ciclo es:

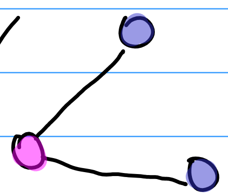
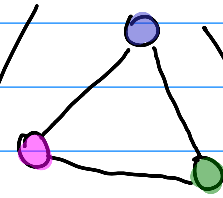
$$= \underbrace{\underbrace{k_1 - d(u_1, v)}_{\text{impar}} + 1 + \underbrace{k_2 - d(u_1, v)}_{\text{impar}}}_{\text{impar}}$$

k_1 y k_2 tienen la misma paridad

Ejercicio 11 Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

$\chi\Big($  $\Big) = 2$, $\chi\Big($  $\Big) = 3$

$\chi(G) = \Delta(G)$ $\qquad\qquad$ $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

Inducción en la cantidad de vertices

Para base $\chi(\circ) = 1$

Hipótesis inductiva Si $|V| = n$

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Tesis inductiva Si $|V| = n+1$

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Consideramos $G = (V, E)$ tal que $|V| = n+1$

Sabemos que hay al menos un $v \in V$ tal que $gr(v) = \Delta(G)$

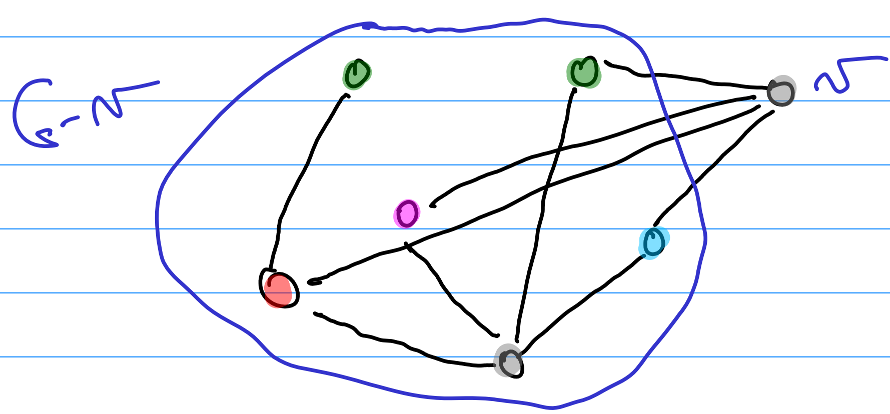
Por lo tanto el grafo $G - v$ tiene n vertices y cumple que $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$

Por hipotesis inductiva

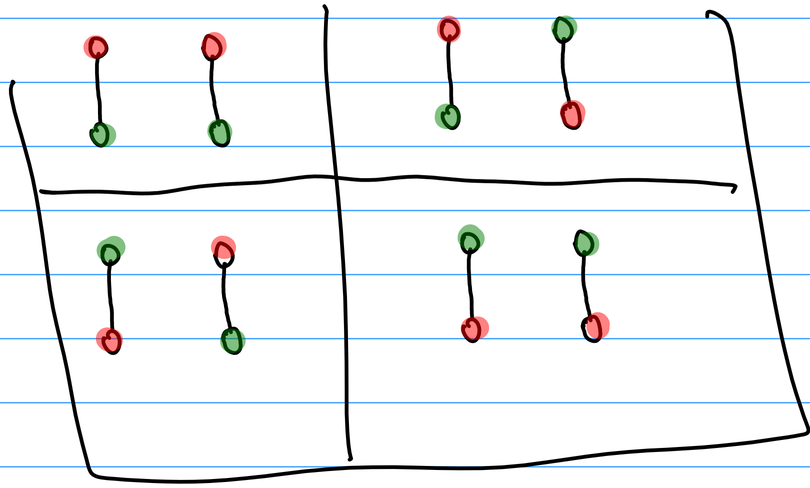
$$\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

Es decir existe una coloración de $G-v$ con a lo sumo $\Delta(G-v)+1$ colores

Ahora extendemos esta coloración a G, v esta conectado a $\Delta(G)$ vertices en el peor de los casos son todos de diferente color y puedo pintar v con $\Delta(G)+1$ colores



Ejercicio 10 Sea G un grafo con 4 vértices que tiene una arista e de G tal que $p_{G-e}(2) = p_G(2) = 2$. Hallar $p_G(3)$.

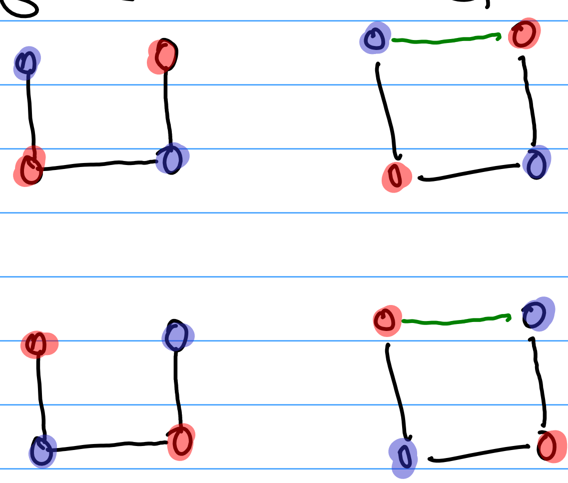


No puede ser

$G-e$ tiene 4 vertices y $\chi(G-e)=2$

$\chi(G)=2$

$G-e$ $\qquad$ G



$P(G-e,2)=2$ hay 2 2-coloraciones