Ejercicio 2
Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 3
Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 4
Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

Ejercicio 5
Hallar la menor cantidad de vértices que puede tener un grafo simple, plano, conexo y 3-regular, tal que cada una de sus regiones tiene al menos 5 vértices.

Ejercicio 6
Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

Ejercicio 7 Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores. $\chi(G) \leq 6$

Ejercicio 7 $|V| \leq 6$ Tiene una 6-coloracion

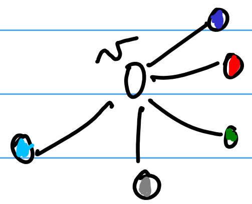
Paso inductivo

(HI) todo grafo plano de n vertices admite 6-coloracion

(T.I) todo grafo de n+1 vertices admite 6-coloracion

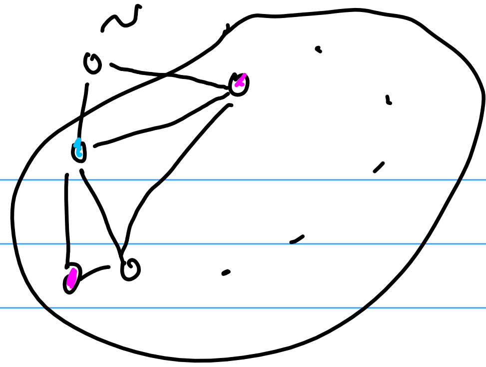
Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n+1$ vertices y G es plano

$\boxed{\text{Ej 6)}}$ $\exists v \in V \quad gr(v) \leq 5$



Considero $G - \{v\}$, este grafo tiene n vertices y es plano

Por (HI) $G - \{v\}$ admite 6-coloracion



Esta coloración de $G-\{v\}$ la podemos extender a G pintando v de un color diferente a sus vecinos, que son a lo sumo 5 colores diferentes

Ejercicio 6
Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

Supongamos que G es plano y además $\forall v \in V \ gr(v) \geq 6$

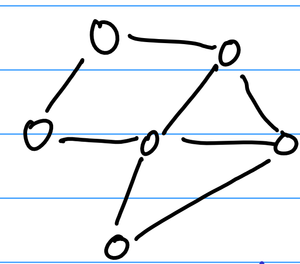
$$6V \leq 2E \Rightarrow 3V \leq E \quad (*)$$

Como el grafo es planar $\boxed{E \leq 3V - 6}$

$$3V \leq E \leq 3V - 6 < 3V$$

↯

$$\underline{E \leq 3V - 6}$$



$$F - E + V = 2$$

$$\sum^{n} \overbrace{gr(F)}^{\#\text{vertices adyacentes}} = \sum^{n} gr(v)$$

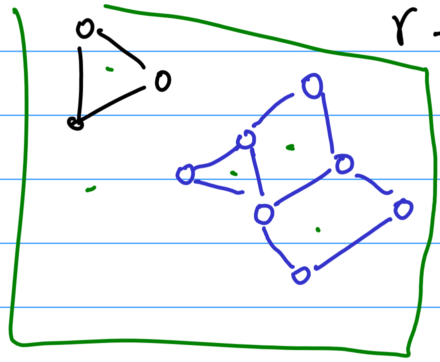
$$3F - 3E + 3V = 6$$

$$3F \leq \sum gr\, V = 2E$$

$$6 \leq -E + 3V \Rightarrow E \leq 3V - 6$$

Ejercicio 4

Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.



$r - E + V = 2$

$r - E + V = 2$

$5 - 12 + 10 = 3 = 2 + \underbrace{1}_{k}$

Si G tiene k componentes conexas lo podemos escribir $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ donde $G_i = (V_i, E_i)$ es un subgrafo conexo

$G_i = (V_i, E_i)$ como es plano cumple:

$$(F_i) \quad r_i - E_i + V_i = 2$$

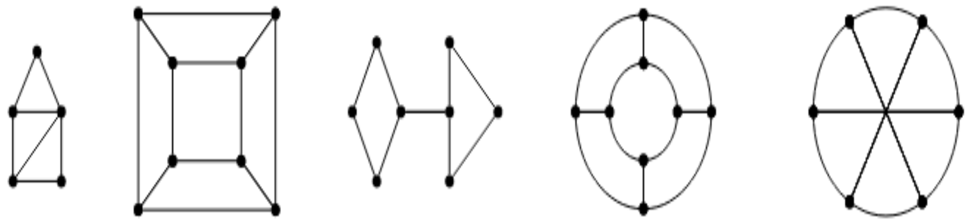
Ahora considera la suma de las ecuaciones (F_i)

$$\sum_{i=1}^{k} (r_i - E_i + V_i) = 2k$$

$$r + k - 1 - E + V = 2k \implies r - E + V = k + 1$$

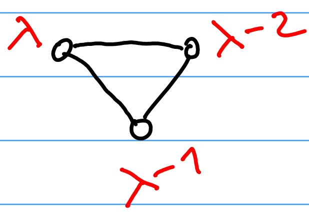
la región exterior se cuenta una vez por cada componente conexa.

Ejercicio 8 Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



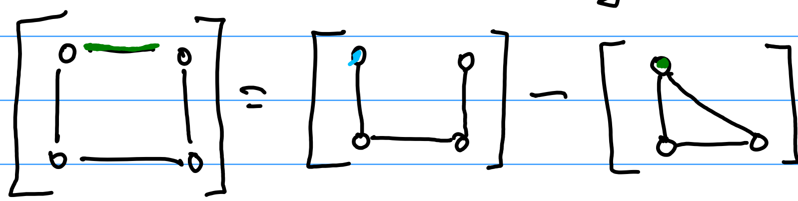
Ejercicio 9

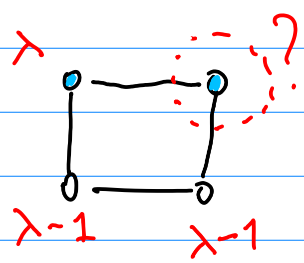
Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, $\overline{K_n}$, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.



$P(C_n) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$[G] = [G - \{u,v\}] - [G_{u=v}]$





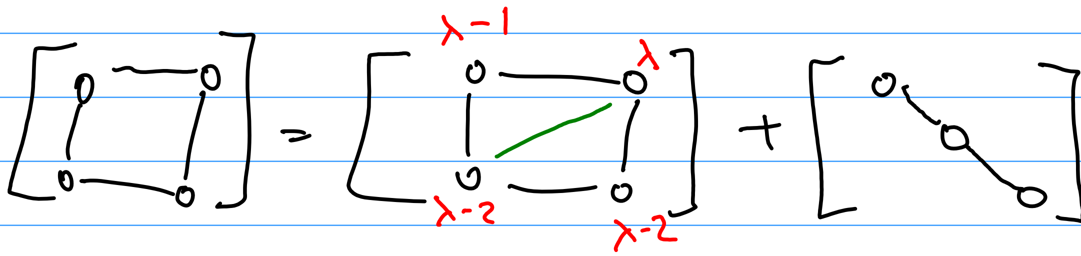
$= \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$\lambda(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2 - \lambda + 2\right)$

$(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda + 2)$

$(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$

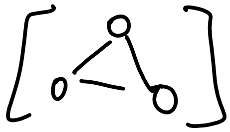
$[G] = [G + \{u,v\}] + [G_{u=v}]$



$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + \lambda(\lambda-1)^2$

$= \lambda(\lambda-1)\left((\lambda-2)^2 + (\lambda-1)\right)$

$(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda - 1) \quad (\lambda^2 - 3\lambda - 3)$

$P(C_3) =$  $= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

$= (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda)$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda \pm \lambda - 1$

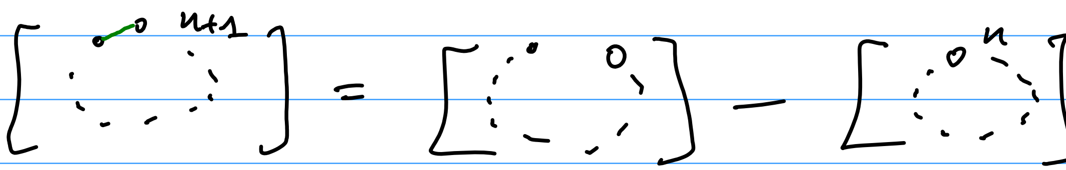
$(\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$= (\lambda-1)^3 + (-1)^3(\lambda-1)$

HI $\quad P(C_n,\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)$

TI $\quad P(C_{n+1},\lambda) = (\lambda-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\lambda-1)$

$P(C_{n+1},\lambda) = P(\lambda_{n+1}-e,\lambda) - P(C_{n+1}\cdot e,\lambda)$



$= \lambda(\lambda-1)^n - \left((\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)\right)$

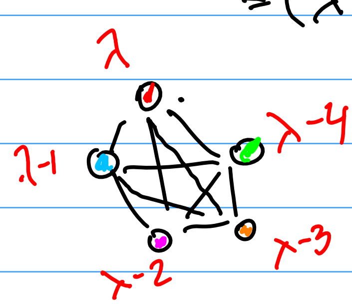
$\vdots$

$= (\lambda-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\lambda-1)$

$\lambda(\lambda-1)^n - (\lambda-1)^n = (\lambda-1)^n(\lambda-1)$

$= (\lambda-1)^n$

$P(K_n) = n!$



$$P(\overline{K_n}) = \lambda^n$$