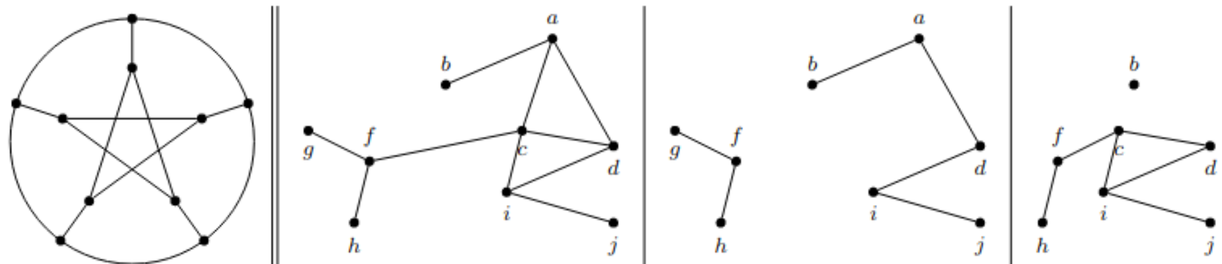
8. Teoría de Grafos - Elementos (Secciones 11.1, 11.2 y 12.1)

Definiciones: Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n*–ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. La *rueda* W_n consiste en un C_n más un vértice adicional unido a los n vértices del ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i).

Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. El árbol trivial tiene un solo vértice y ninguna arista. La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2. Un vértice se dice *aislado* si no es adyacente a ningún otro. Dado un grafo G denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.



(i) Grafo de Petersen (ii) G (iii) G_1 (iv) G_2

Figura 1

Ejercicio 1 Para el grafo G de la Figura 1 (ii), determinar:

(a) Un camino que no sea un recorrido;

(b) Un recorrido que no sea camino simple;

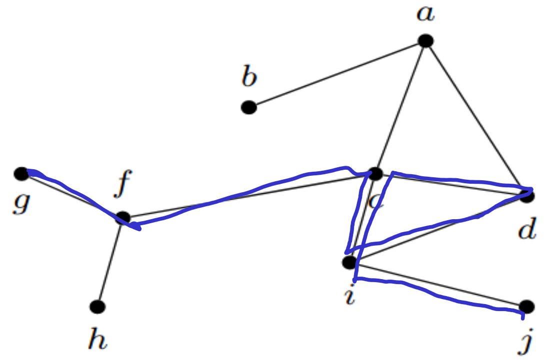
(c) Los tres caminos simples de b a f.

(d) La cantidad de subgrafos conexos de G que tienen 4 vértices e incluyen algún ciclo.

(e) La cantidad de subgrafos recubridores de G.

(f) La cantidad de subgrafos recubridores conexos de G.

(g) Mostrar que G_1 y G_2 (Figuras 1 (iii) y (iv)) son subgrafos inducidos de G.



(ii) G

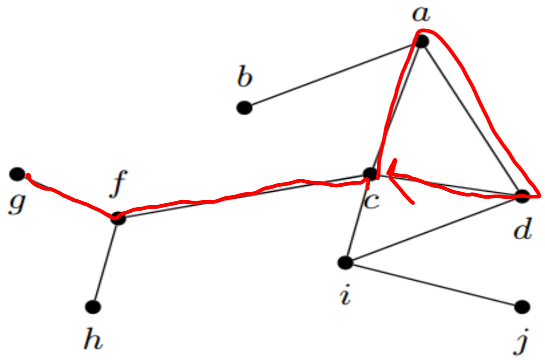
Camino: sucesión de aristas y vértices adyacentes

Camino simple: no repite vértices

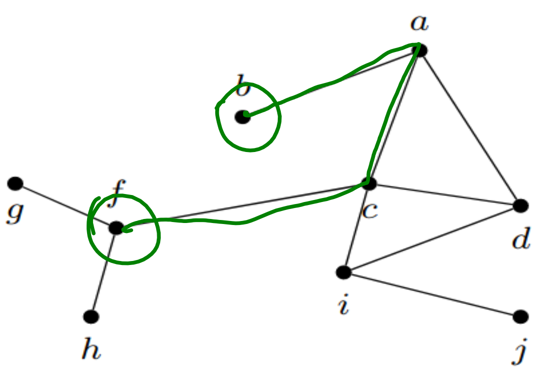
Recorrido: camino abierto

que no repite aristas

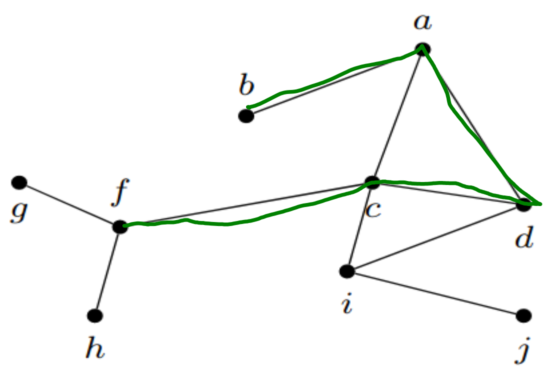
Recorrido que no es camino simple



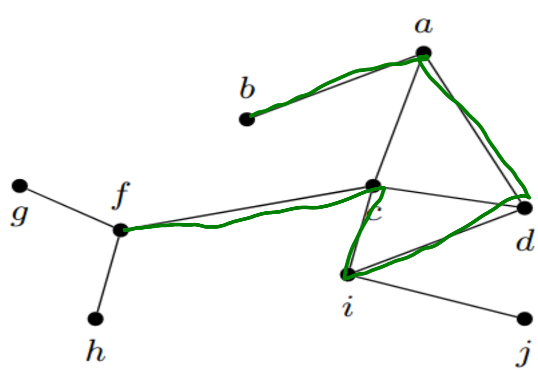
(ii) G



(ii) G



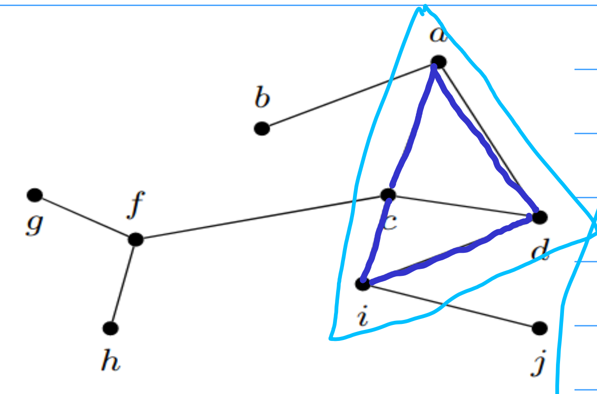
(ii) G



(ii) G

(d) La cantidad de subgrafos conexos de G que tienen 4 vértices e incluyen algún ciclo.

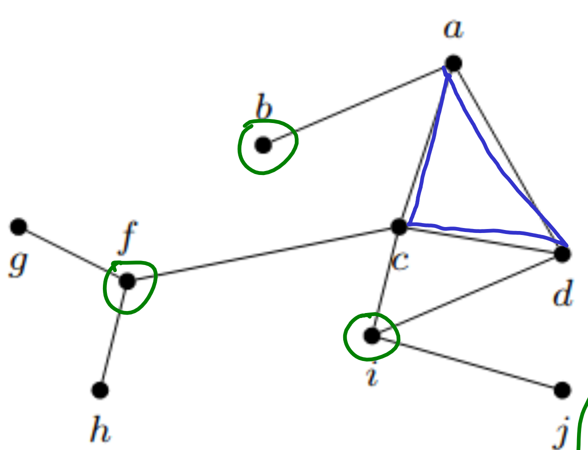
(e) La cantidad de subgrafos recubridores de G.



(ii) G

Primer caso:

Los vértices a, c, d, i
y las aristas
(a,d), (d,i), (i,c)
(c,a)
y tiene un solo ciclo
Hay 1



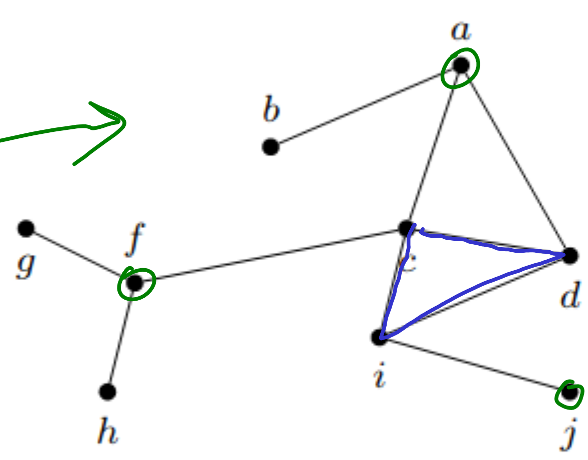
(ii) G

Caso 2

a, c, d y las aristas
(a,d), (c,d), (a,c)
están en los subgrafos
y además tienen un solo
ciclo
Hay 4

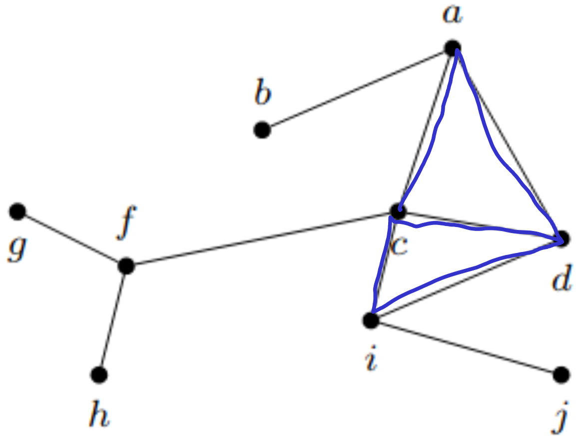
Caso 3:

c, d, i (c,d), (d,i), (i,c)
y además hayan un solo
ciclo.
Hay 4

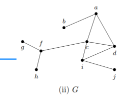


(ii) G

Caso 4:
subgrafo con mas de un ciclo

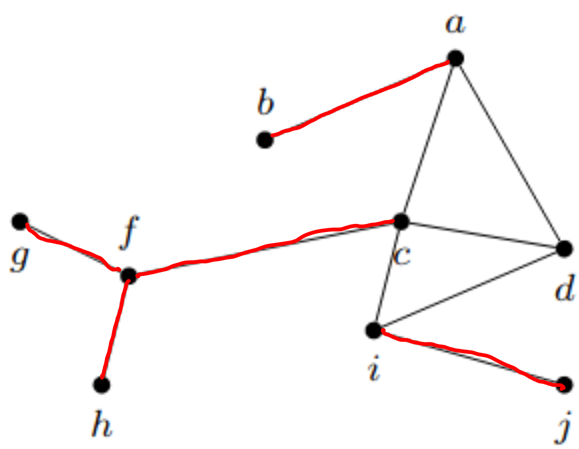


(ii) G



conclusión hay 10 subgrafos de 4 vertices, conexos, con al menos un ciclo

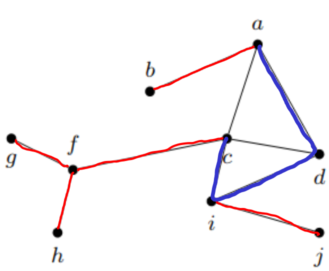
(e) La cantidad de subgrafos recubridores de G.



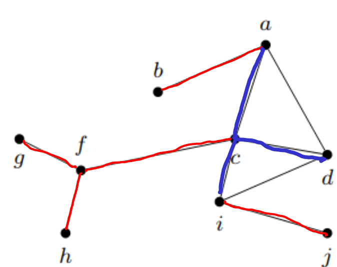
(ii) G

Las aristas rojas tienen que estar en el subgrafo

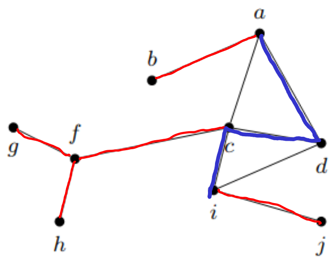
Caso 1: contamos los subgrafos recubridores sin ciclos



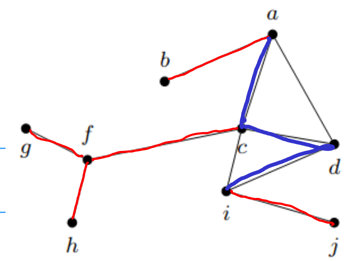
(ii) G



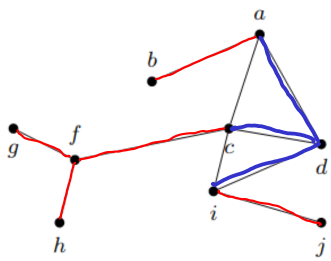
(ii) G



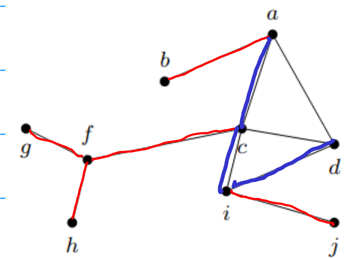
(ii) G



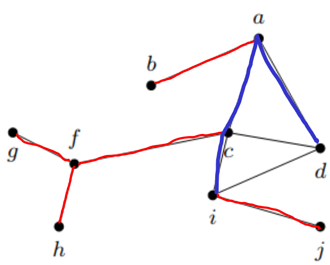
(ii) G



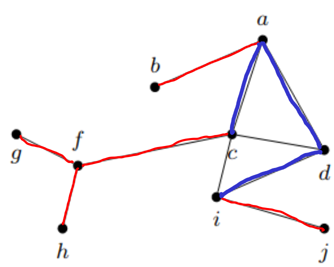
(ii) G



(ii) G



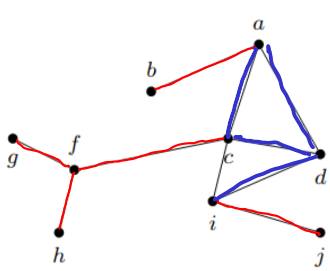
(ii) G



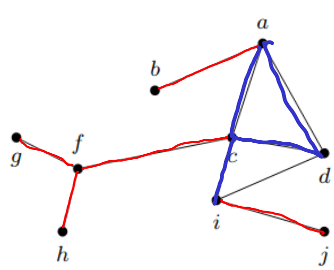
(ii) G

Caso 1 hay 8

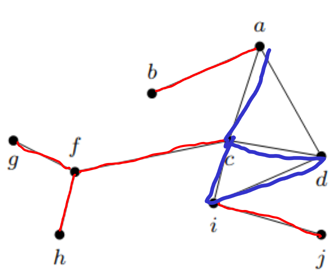
Caso 2 subgrafos que tienen un solo ciclo



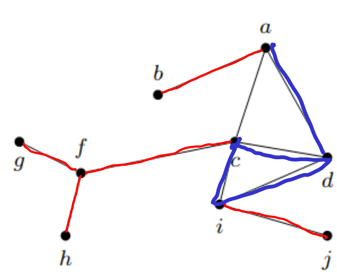
(ii) G



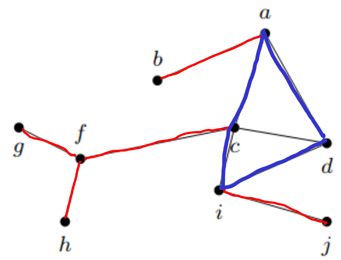
(ii) G



(ii) G

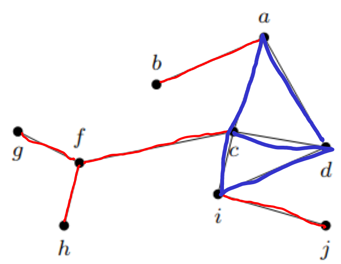


(ii) G



(ii) G

Hay 5

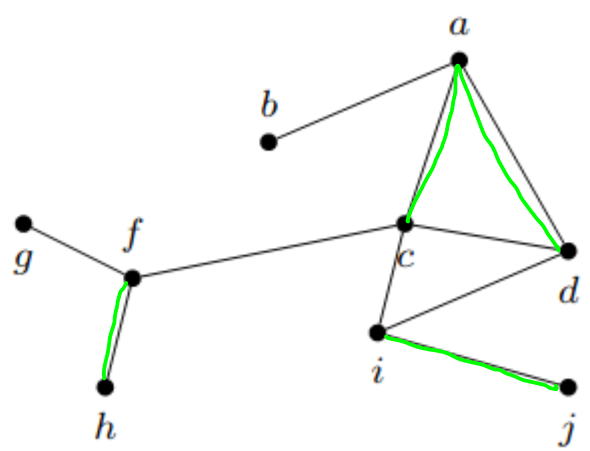


(ii) G

Caso 3: subgrafo recubridos con más de un ciclo

Hay 1

Conclusion hay 15 subgrafos recubridores conexos



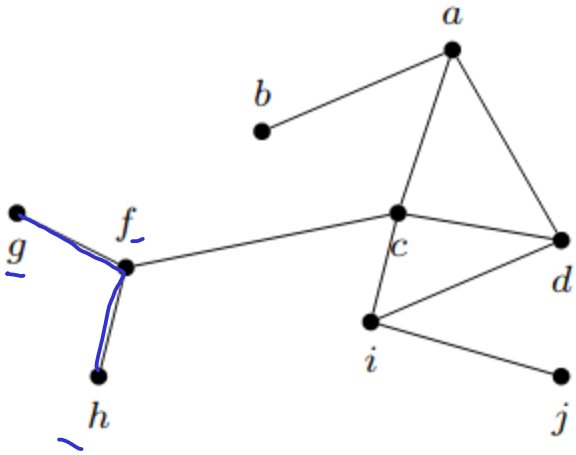
(ii) G

Subgrafos con los vertices $\{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}$

9 vertices y cualquier subconjunto de aristas?

En el grafo G hay 10 aristas, si H es un subgrafo a lo sumo tiene 10 aristas si tiene 9 vertices.

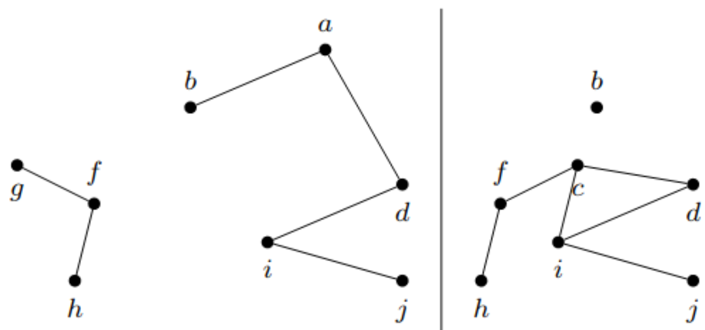
Hay 2^{10} subgrafos de 9 vertices



(ii) G

$G = (V, E)$

$S \subset V$



(iii) G_1 (iv) G_2

G_1 es el inducido por: a b d i g h f j

G_2 h f c i d j b