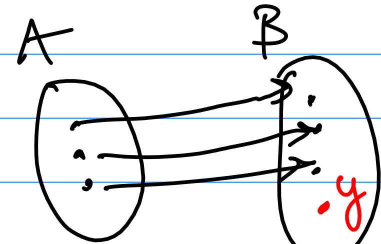
¿Hay más relaciones de orden o de equivalencia en $\{1,2,3,\dots,100\}$?
$$\{1,2,3,\dots,100\} = A$$

$$R_{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} R_i$$

conjuntos con finitos elementos

Si tenemos una función $f: A \to B$ inyectiva, entonces $|A| \le |B|$




si además tengo $y \in (B \setminus \operatorname{Im} f) \Rightarrow$

$$|A| < |B|$$

Nuestro plan ahora es:

Dar una función

$f: \{\text{Relación de equivalencia}\} \to \{\text{Rel. de orden}\}$

inyectiva y que $\exists\, y \in \{\text{Rel de Orden}\} \setminus \operatorname{Im} f$

Sea $R$ una relación de eq.

$A/R$ la vamos a representar de manera única tomando el mínimo elemento de cada clase.

Ejemplo $R \subset A \times A$

$$xRy \iff \begin{array}{l} 10i \leq x < 10(i+1) \\ 10i \leq y < 10(i+1) \end{array} \qquad i \in \{0, \dots 10\}$$

$[1] = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad 0 \leq 1 < 10$

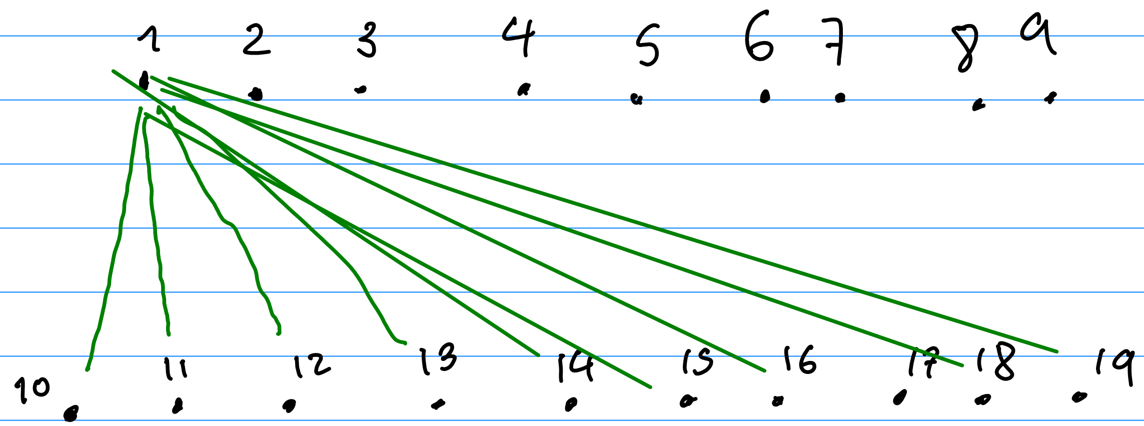
$[10] = \{10, 11, 12, \dots 19\}$

$[20] = \{20, 21, \dots 29\}$

$\vdots$

$[90] = \{90, 91, \dots 99\}$

$[100] = \{100\}$




Sean $x, y \in \{1, 2, \dots 100\}$

Defino un orden de esta manera

$A/R = \{[1], [10], [20], \dots [90], [100]\}$

$S = \{1, 10, 20, 30, 40, \dots, 90, 100\}$

S es el conjunto de representantes con los elementos mas chicos de cada clase

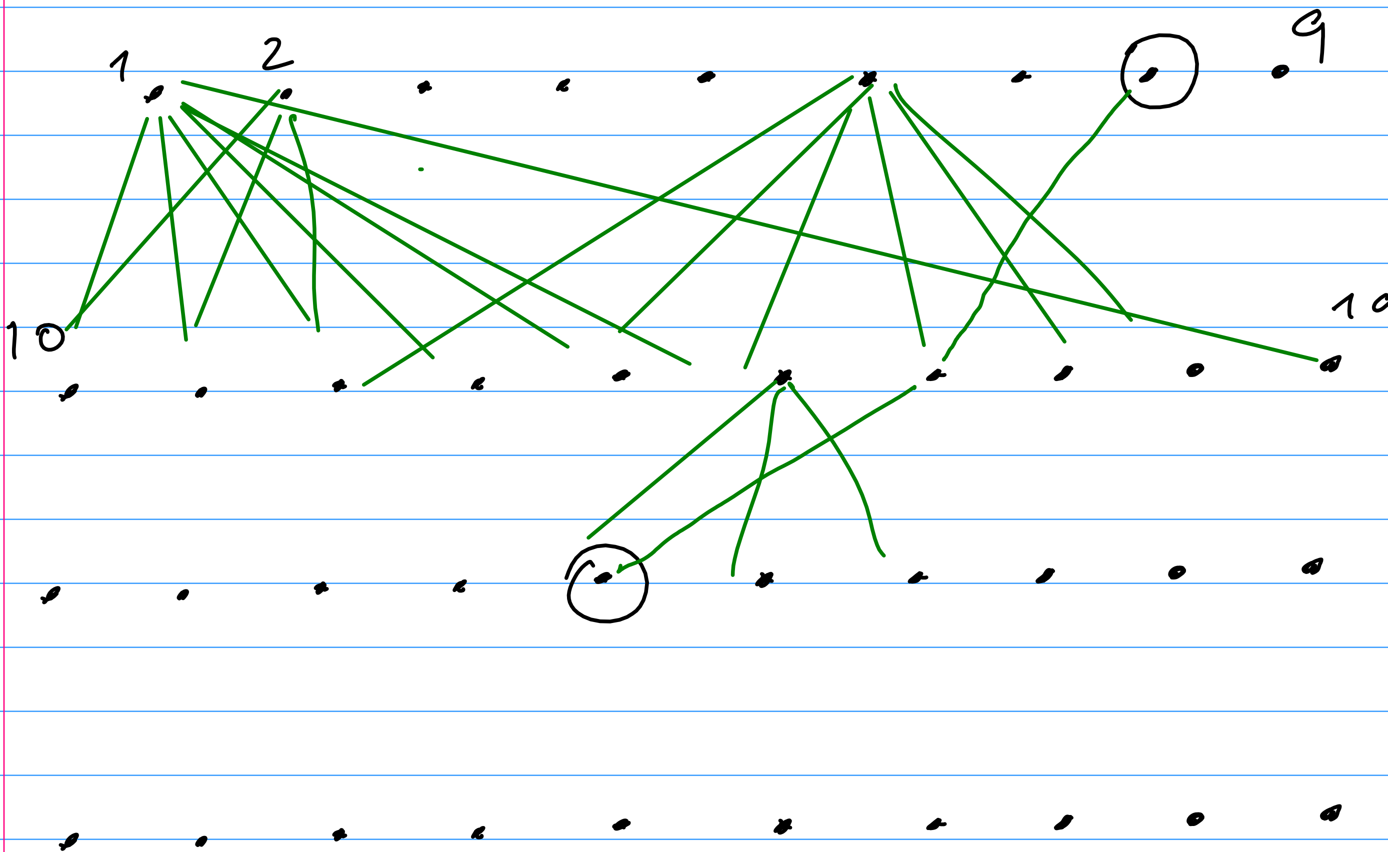
orden usual

$x \in [K_1]$, $y \in [K_2]$, $K_1, K_2 \in S$

$\boxed{\text{garantiza } x \le x}$

Defino $\leq$ un orden en $A \times A$

$$x \leq y \text{ sii } \left( K_1 < K_2 \text{ ó } (x = y) \right)$$




Vamos a probar que $\leq$ como lo acabamos de definir es antisimétrico

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$$

$x \in [K_1] \quad y \in [K_2] \quad K_1, K_2 \in S$

$(x \leq y) \quad (K_1 < K_2)$ ó $(x = y)$

$(y \leq x) \quad (K_2 < K_1)$ ó $(y = x)$

$$\Big(\big(K_1 < K_2\big) \vee (x = y)\Big) \wedge \Big(\big(K_2 < K_1\big) \vee (y = x)\Big)$$

$$= \Big((K_1 < K_2) \wedge \big((K_2 < K_1) \vee (x = y)\big)\Big) \vee \Big((x = y) \wedge \big((K_2 < K_1) \vee (x = y)\big)\Big)$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{\Big((K_1 < K_2) \wedge (K_2 < K_1)\Big)}_{\text{Falacia}} \vee \underbrace{(x = y)}_{V} \Longrightarrow x = y$$

$\neg P \wedge P =$ Falso

En el caso general

R una relación de eq

$$A/R = \{ [x] : x \in A \}$$

$S = \{ K_1, K_2 \dots K_n \} \qquad n \in \{1 \text{—} 100\}$

$S$ es el conjunto de representantes tal que

$$K_i = \min_{x \in [K_i]} x$$ el mas chico de cada clase

$\forall\, x, y \in \{1, 2, \ldots 100\}$

$x \in [K_1]$, $y \in [K_2]$

Defino $\leq_R \subset A \times A$

$$x \leq_R y \iff (K_1 < K_2) \vee (x = y)$$

$\leq_R$ es un orden (Ejercicio)

Definimos

$f : \{\text{Rel. de eq.}\} \to \{\text{Rel. orden}\}$

$$R \longmapsto \leq_R$$

<u>Afirmación</u> $f$ es inyectiva

$$f(R_1) = f(R_2) \Rightarrow R_1 = R_2$$

$$\forall x, y \quad x \leq_{R_1} y \iff x \leq_{R_2} y$$

Vamos a probar que

$$\boxed{[x]_{R_1} = [x]_{R_2}}$$

Afirmacion :

$$[x]_{R_1} = \{ y : \overbrace{(y = x) \vee (x \not\leq_{R_1} y)}^{\text{Están en el mismo nivel}} \}$$

$$[x]_{R_1} = \{ y : y R x \} = [K_1]$$

Si $y \in [x] \setminus \{x\}$ $\quad x \not\leq_{R_1} y \longleftrightarrow K_1 \not< K_1$

$\quad y \not\leq_{R_1} x \longleftrightarrow K_1 \not< K$ $\quad \square$

Dem

$\forall x \in A$ tengo que

$$[x]_{R_1} = \{ y : (y = x) \vee ((y \not\leq_{R_1} x) \wedge (x \not\leq_{R_1} y)) \}$$

como $\leq_{R_1} = \leq_{R_2}$ tenemos que

$$[x]_{R_1} = \{ y : \underbrace{(y = x) \vee ((y \not\leq_{R_2} x) \wedge (x \not\leq_{R_2} y))}_{} \}$$

$$= [x]_{R_2}$$

Esto prueba que $A/_{R_1} = A/_{R_2}$ que es lo mismo que decir que $R_1 = R_2$

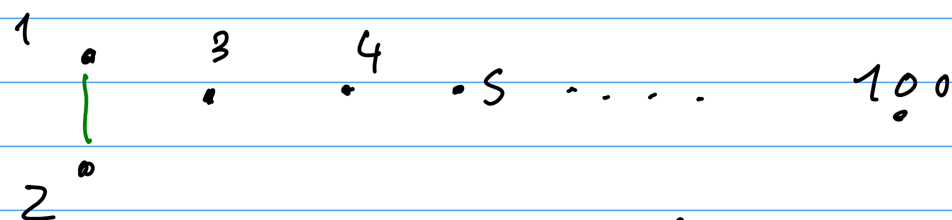
Acabamos de probar que $f$ es inyectiva

Hasta acá tenemos que

$$|\{\text{Rel. de eq.}\}| \leq |\{\text{Rel orden}\}|$$

Defino $\leq' \subset A \times A$

$1 \leq' 2$ ,




<u>Afirmación $(\leq') \notin \operatorname{Im} f$</u>