Ejercicio 8

Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 9

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n,i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n)$

Ej 8) $R \subset A \times A$ simétrica, transitiva y además $\forall a \in A$ $\exists b : aRb$. Entonces R es de equivalencia

Queremos probar $\forall a$ aRa

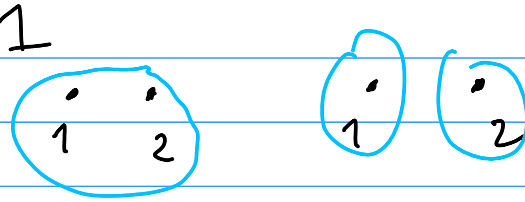
aRb como es simétrica bRa

$aRb \wedge bRa$ al ser transitiva aRa

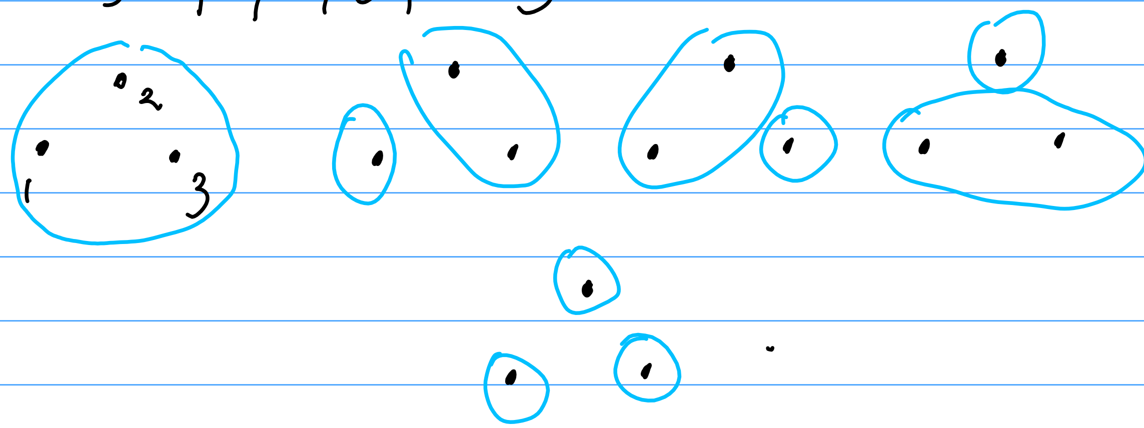
Ej 9) R_0 Nº de relaciones de equivalencia del conjunto $\{\} = 1$

R_1 $\{1\} = 1$

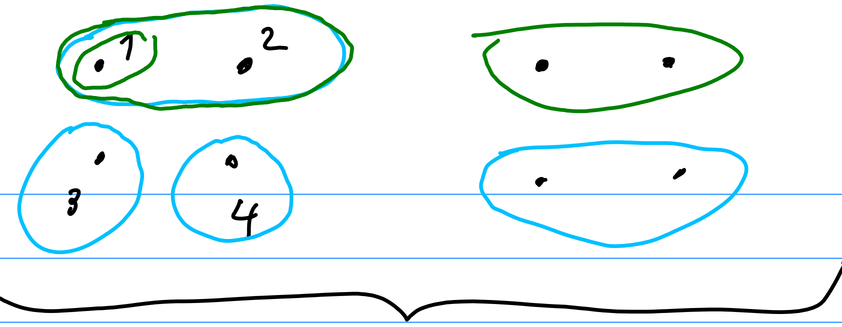
R_2 $\{1,2\} = 2$



R_3 $\{1,2,3\} = 5$



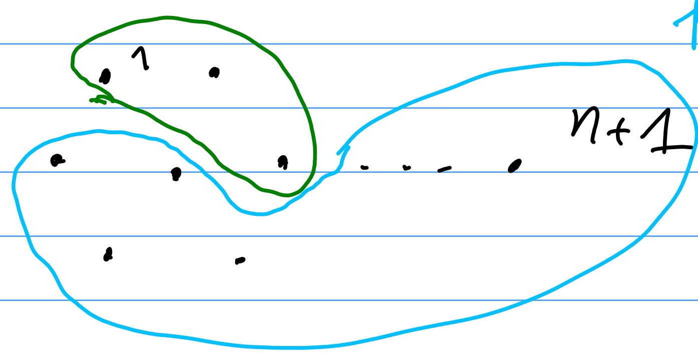
R_4



R_2 particiones con el conjunto $\{1,2\}$

$$R_{n+1} = \sum^{n} \binom{n}{i} R_{n-i}$$

k elementos



$k \in \{0, \dots n\}$

Dada una particion cualquiera de un conjunto de $n+1$ elementos, podemos remover la clase del 1 y esto induce una particion en los k elementos restantes

Hay $\binom{n}{k}$ maneras de tomar la clase y hay R_{n-k} particiones

Por esto $R_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} R_{n-k}$

$\{1\}$ $\quad R_n$

$\{1, 3, 7\}$ $\quad \binom{n}{3} R_{n-3}$

Ejercicio 13 Demostrar que si $(A, \leq)$ es un retículo y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo.

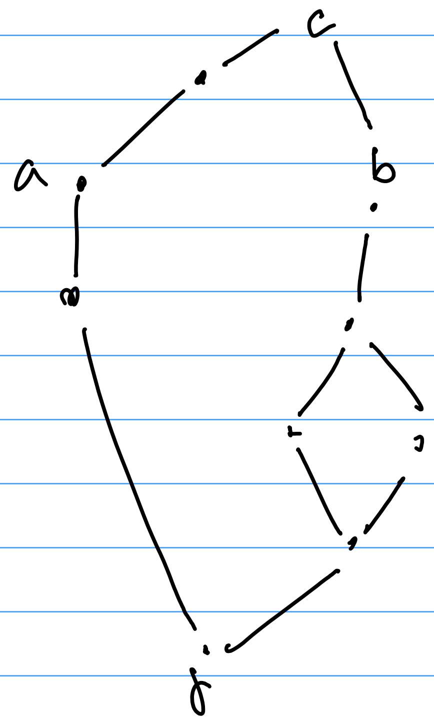
Ejercicio 14 Demostrar que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

Ejercicio 15 Sea $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ej 13) $(A, \leq)$ es un retículo si, $\leq$ orden

$\forall a, b \in A \quad \exists c: \quad a \leq c$ y $b \leq c$

$\exists d \quad d \leq a$ y $d \leq b$



$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Paso 1 elijo $b_1 = \sup(a_1, a_2)$

Paso 2 elijo $b_2 = \sup(b_1, a_3)$

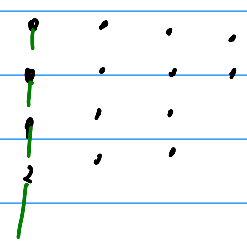
$\vdots$

Paso n-1 elijo

$b_{n-1} = \sup(b_{n-2}, a_n)$

$\boxed{b_{n-1} = \sup(A)}$

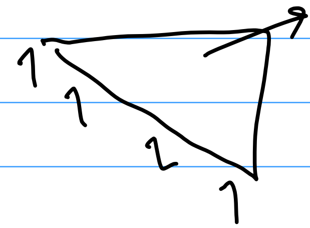
14)



15) Relaciones de eq.

$$\sum^{99} \binom{99}{i} R_{99-i} = \sum_{i=1}^{100} S(100, i)$$

Sim, reflexivas



$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

antisimétricas, reflexivas

$3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Ejercicio 3

Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

iRj $\quad iRk$

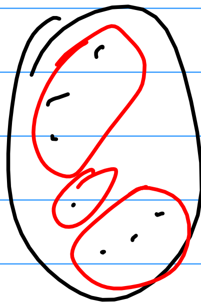
jRk

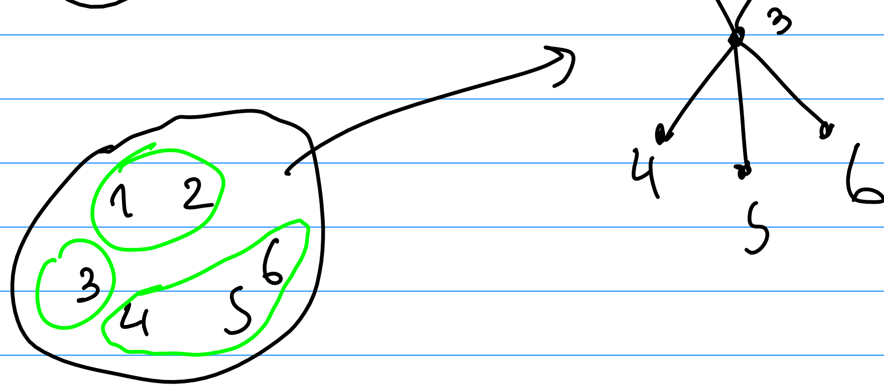
SIM	ANT

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relación de orden

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100} \longrightarrow a_1 a_2 a_3 - a_{100}$$





Ejercicio: Encontrar una función inyectiva

$$f: \{\text{Rel. de eq.}\} \to \{\text{Rel de orden}\}$$

Hay órdenes que no son totales