Ejercicio 5
En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 6
Sea $f : A \to B$ una función. Sea $R_f \subset A \times A$ tal que $xR_fy \iff f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Probar que existe una función biyectiva entre A/R_f y la imagen de f.

(c) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 7
Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n \text{ (o sea que existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k.n).$$

(a) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

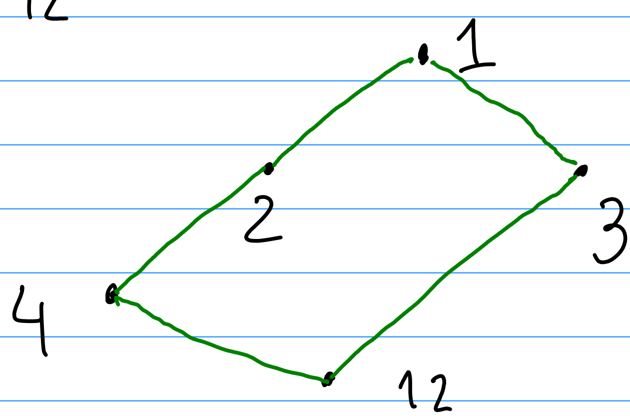
(b) Probar que $\mathbb{Z}/\equiv$ tiene n elementos.

Ejercicio 10 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

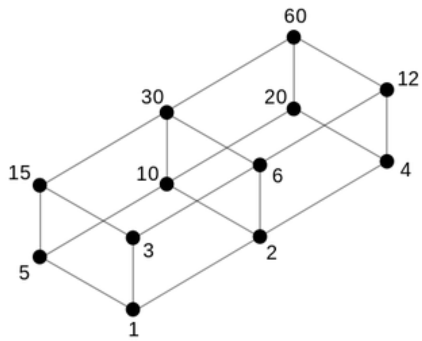
(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

	1	2	3	4	12
1	✓	✓	✓	✓	✓
2		✓		✓	✓
3			✓		✓
4				✓	✓
12					✓



Concretamente, uno representa a cada miembro de *S* como un punto negro en la página y dibuja una línea que vaya hacia arriba de *x* a *y* si *y* sigue a *x*.

Por ejemplo, sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ (todos los divisores de 60). Este conjunto está ordenado parcialmente por la relación de divisibilidad. Su diagrama de Hasse puede ser representado como sigue:



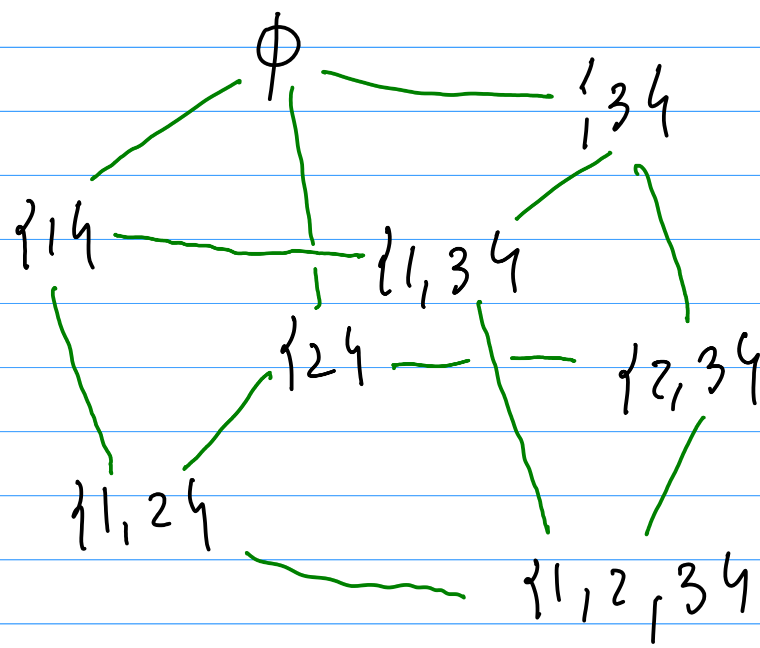
Por ejemplo, en el diagrama de Hasse del *poset* de todos los divisores de un número *n*, ordenados parcialmente por divisibilidad, *n* mismo está en el tope del diagrama, el número 1 estaría en el fondo, y los divisores más pequeños (primos) seguirían al elemento inferior.

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

$\leq \subset P(A) \times P(A)$

$X \leq Y$ si $X \subseteq Y$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$



Relacion de orden $\{1,2,3,\ldots,n\}$

1 Reflexiva

2 Antisimetrica

3 transitiva

Ejercicio 11 Calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre $\{1,2,3\}$.

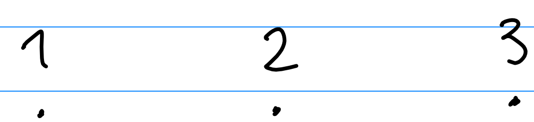
$R \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ $\qquad A_R = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$

2^9 relaciones

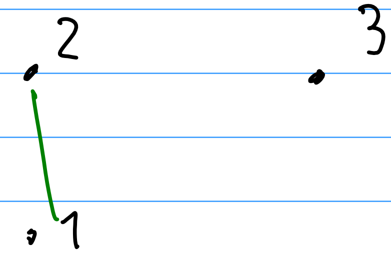
Reflexivas 2^6 $\qquad \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$

Queremos que sea Reflexiva antisimetrica y transitiva

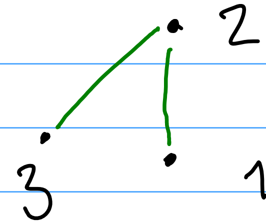
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

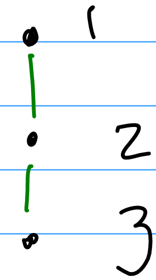
$1 \not\leq 3$

$1 \leq 2$

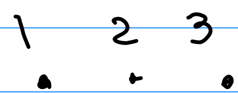
$2 \leq 3$

No es transitiva

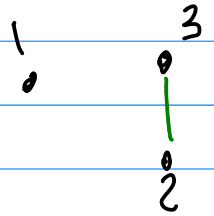
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



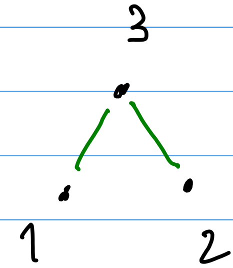
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



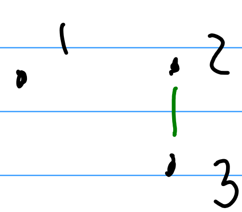
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



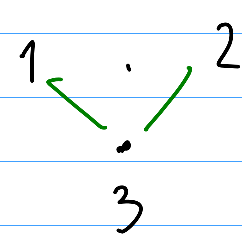
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

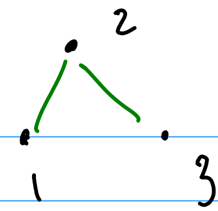
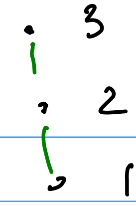


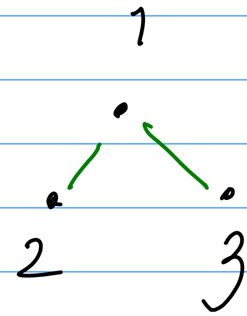
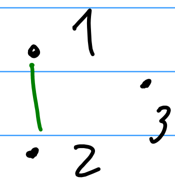
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

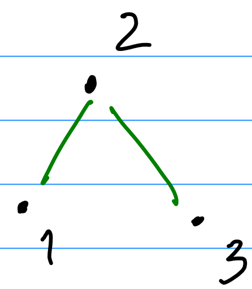
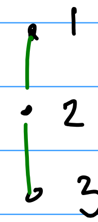


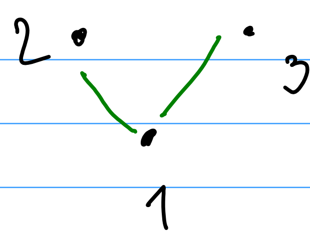
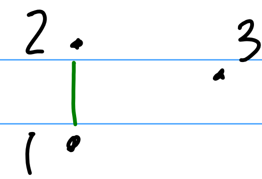
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

hay [illegible] 13

Supongamos que el orden es total

$1<2<3$ $\qquad$ $2<3<1 \rightarrow 231$

$3<2<1$

Permutaciones de 3 $\quad 3!$ $\qquad$ 6 ordenes totales

$2 \leq 3 \leq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

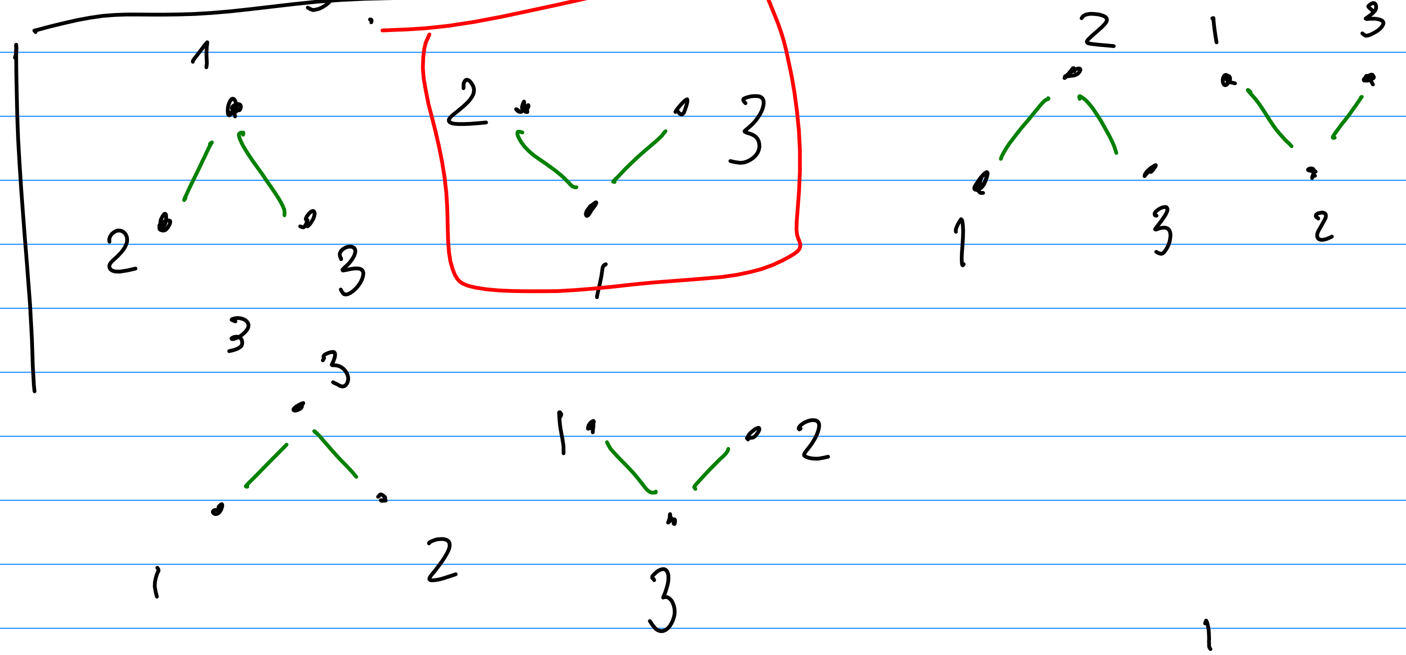
Un orden que no es total

$(1<2,\ 1<3) \longrightarrow 1\,2\,|\,3$

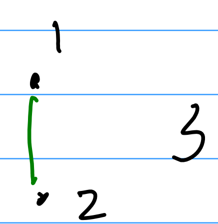
$(2<1,\ 2<3) \longrightarrow 2\,|\,2\,3$

$3!$

$3!$



La siguiente posibilidad



$a<b \longrightarrow ab$ $\quad 3\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>19 ordenes</u>