Ejercicio 5
En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 6
Sea $f : A \to B$ una función. Sea $R_f \subset A \times A$ tal que $xR_fy \iff f(x) = f(y)$. ✓

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Probar que existe una función biyectiva entre A/R_f y la imagen de f.

(c) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 7
Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n \text{ (o sea que existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k.n).$$

(a) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(b) Probar que $\mathbb{Z}/\equiv$ tiene n elementos.

Ejemplo

Si $n = 5$

$0 \equiv 5 \pmod 5$ $\qquad 0 \equiv_5 5$

$0 \equiv_5 5k \qquad -5k = -k\,5$

(a) i) reflexiva $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv_n a$

$a - a = 0 = 0 \cdot n \Rightarrow a \equiv_n a$

ii) Simétrica

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv_n b$

Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$a - b = k \cdot n$

$\times(-1)$

$b - a = -k \cdot n \quad , \quad k' = k$

$b - a = k' \cdot n \Rightarrow b \equiv_n a$

iii) Si $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$

$\exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ i) $a - b = k \cdot n$

ii) $b - c = l \cdot n$

i) + ii) $a - b + b - c = k \cdot n + l \cdot n$

$a - c = (k + l) n \Rightarrow a \equiv_n c$

b) $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ tiene n elementos *

$[x] := \{ m : m \equiv_n x \}$ ← la clase de equivalencia del elemento x

$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} := \{ [x] : x \in \mathbb{Z} \}$

Es decir que hay solo n clases de equivalencia

Ejemplo $\equiv_5$, $\mathbb{Z}/_{\equiv_5}$ tiene 5 elementos

$[0] = \{ y : y = 5k,\ k \in \mathbb{Z} \} = \{ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots \}$

$[1] = \{ y : y = 5k + 1 \} = \{ \ldots -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots \}$

$[2] = \{ y : y = 5k + 2 \} = \{ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots \}$

$[3] = \{ y : y = 5k + 3 \} = \{ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots \}$

$[4] = \{ y : y = 5k + 4 \} = \{ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots \}$

$[5] = \{ y : y = 5k + 5 \} = \{ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots \}$

$[0] = [5]$

$m \equiv m' \Rightarrow [m] = [m']$

$$\mathbb{Z}/\equiv_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

$$= \{[-2], [-1], [0], [1], [2]\}$$

$$= \{[0], [6], [142], [83], [9994]\}$$

$\forall m \in \mathbb{Z}$ $\exists!$ k, r tales que

$$m = 5k + r, \quad r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Como r es unico para m, tenemos que
$m \equiv r \pmod 5$

$\mathbb{Z}/\equiv_5$ tiene 5 clases de eq.

En general, para un n cualquiera
si $m \in \mathbb{Z}$ existen (por la división entera)
unicos k y r con $r \in \underbrace{\{0, 1, 2, \dots, n-1\}}_{n \text{ elementos}}$ tales que

$$m = n \cdot k + r \Rightarrow m \equiv_n r$$

$$\mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0], [1], [2], \dots, [n-1]\}$$

Tiene n clases de equivalencia

Ejercicio 5

En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

(a) $aRb \quad a^2 = b^2$

$[0] = \{0\}$ $\qquad 1^2 = (-1)^2$

$[1] = \{1, -1\}$

$[2] = \{2, -2\}$

$\vdots$

$[n] = \{n, -n\}$

$A/R = \{[0], [1] \ldots\} = \{[n] : n \geq 0\} \cong \mathbb{N}$

b) $aRb \quad a^2 \equiv b^2 \pmod 5$

$a \in \mathbb{Z} \quad a = 5 \cdot k + r, \quad r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a \equiv r \pmod 5$

$a^2 = (5 \cdot k + r)^2 = 25 \cdot k^2 + 10 kr + r^2$

$= 5(5 \cdot k^2 + 2 \cdot kr) + r^2$

$\Rightarrow a^2 \equiv r^2$

$[0] = \{x : x = 5k\}$

$x \equiv 0 \Rightarrow x^2 \equiv 0$

$x^2 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$ Vamos a probarlo

supongamos que $x \equiv r$ $r \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow x^2 \equiv r^2 \not\equiv 0$

$\Rightarrow x^2 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0$

$[1] = \{x : x^2 \equiv 1\} = \{x : x^2 - 1 = 5k\}$

$= \{x : (x-1)(x+1) = 5k\} = \{x : x \equiv 4$ ó $x \equiv 1\}$

$= \{x : x \equiv \pm 1\}$

$[2] = \{x : x^2 \equiv 4\} = \{x : x^2 - 4 = 5k\}$

$= \{x : (x-2)(x+2) = 5k\} =$

$\{x : x \equiv 3$ ó $x \equiv 2\} = \{x : x \equiv \pm 2\}$

r	r^2	
0	0	[0]
1	1	[1]
2	4	[2]
$-2 \equiv 3$	4	[2]
$-1 \equiv 4$	1	[1]