Ejercicio 1

Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

(b) $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

Reflexiva

$$\forall a \in A: \ (a,a) \in R$$

IRREFLEXIVA

$$\forall a \in A: \ (a,a) \notin R$$

Que también puede expresarse

$$\nexists a \in A: \ (a,a) \in R$$

Simétrica

$$\forall a,b \in A: \ (a,b) \in R \quad \longrightarrow \quad (b,a) \in R$$

Antisimétrica

$$\forall a,b \in A: \ \big((a,b) \in R \quad \wedge \quad (b,a) \in R\big) \quad \longrightarrow \quad a = b$$

Transitiva

$$\forall a,b,c \in A: \ \big((a,b) \in R \quad \wedge \quad (b,c) \in R\big) \quad \longrightarrow \quad (a,c) \in R$$

a) $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \in R \Rightarrow$ es reflexiva

Es simétrica

Es transitiva

(a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

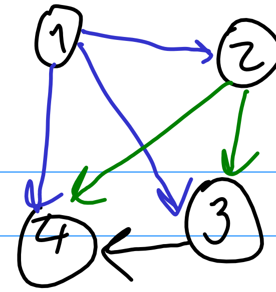
	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		
3			✓	✓
4			✓	✓

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = A^T$ $\quad$ A es simétrica $\quad$ $a_{ij} = a_{ji}$

$$i \sim_R j \longleftrightarrow j \sim_R i$$

(b) $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es irreflexiva

$\forall a \in A,\ (a,a) \notin R$

$$\forall a,b \in A \ \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\big) \Rightarrow a = b$$

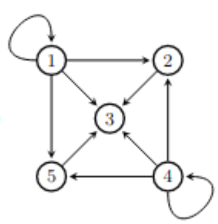
$P \Rightarrow Q$

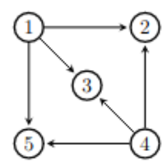
P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Es antisimetrica y es transitiva

(d) $A \times A$.

(e) Tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:

i) 

ii) 

d) $R = A \times A$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Simetrica, Reflexiva, Transitiva

e)

i) No es simetrica. No es reflexiva ni irreflexiva. Es transitiva. Es antisimetrica.

ii) No es simetrica. No es reflexiva. Transitiva. Antisimetrica. Irreflexiva.

(f) Las relaciones cuyas matrices son

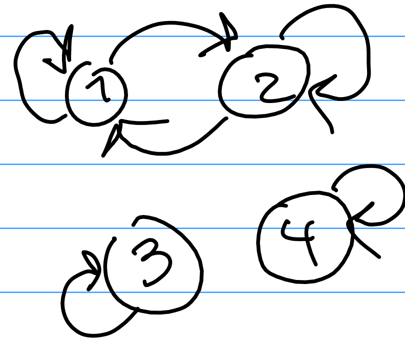
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Simétrica
Irreflexiva
No es transitiva

$(1,2), (2,3) \in R \quad (1,3) \notin R$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simétrica
Reflexiva
Es transitiva



Ejercicio 2

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

$$\begin{pmatrix} X & 1 & X & X \\ 1 & X & X & X \\ X & X & 1 & X \\ X & X & X & X \end{pmatrix}$$

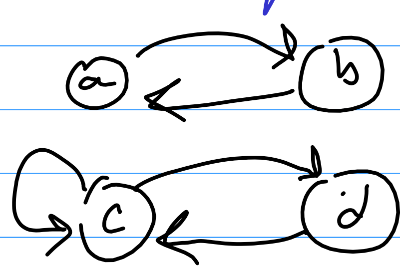
$\#$ Relaciones simétricas con condición $(a,b) \in R$ $(c,c) \in R$

$= \#$ Matrices Simétricas con entradas 0 ó 1

$a_{12} = a_{21} = a_{33} = 1$

Voy a tener 2^8 matrices posibles

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas.*

$A = \{a_1, a_2, \dots \; a_n\}$ $\qquad A_R \in \mathcal{M}_{n \times n}$

a) $A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

R es simétrica $\Longleftrightarrow$ A_R es simétrica $(A_R = A_R^T)$

$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$ $\qquad A_{R^{-1}} = A_R^T$

Si R es simétrica $R^{-1} = R$

$R, S \subseteq A \times A$ $\qquad R \cup S = \{(a,b) \in A \times A : (a,b) \in R$ ó $(a,b) \in S\}$

$A_{R \cup S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

R y S simétricas ¿$R\cup S$ es simétrica? Si

$(a,b)\in R\cup S$

$(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R\subset R\cup S$

o $(a,b)\in S \Rightarrow (b,a)\in S\subset R\cup S$

$$A_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \qquad A_S=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$R,S\subseteq A\times A \qquad R\cap S=\{(a,b):(a,b)\in R\wedge(a,b)\in S\}$

$$A_{R\cap S}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

R y S simétricas ¿$R\cap S$ simétrica? Si

$$(a,b)\in R\cap S\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R\\(a,b)\in S\Rightarrow(b,a)\in S\end{array}\right\}(b,a)\in R\cap S$$

$(a,b)\in R\cap S\Rightarrow(b,a)\in R\cap S$

$R\circ S=\{(a,b):\exists c\ \ (a,c)\in R,\ (c,b)\in S\}$

Ejercicio 4

¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?