Ejercicio 2

Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

(a) $f(x) = (2x-3)^3$
(b) $f(x) = x^3/(1-x)$
(c) $f(x) = x^3/(1-x^2)$
(d) $f(x) = 1/(1+3x)$
(e) $f(x) = 1/(2-x)$
(f) $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^{10}$.
(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^n$.
(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1+x+x^2)(1+x)^n$ para $0 \leq r \leq n+2$, $r \in \mathbb{N}$.
(d) Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones

- $x^3(1-2x)^{10}$.
- $(x^3-5x)/(1-x)^3$.
- $(1+x)^4/(1-x)^4$.

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^m x^i$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} \binom{n}{i}$$

Hallar el coeficiente x^{15} en $x^3(1-2x)^{10}$
equivale a hallar el coeficiente x^{12} en $(1-2x)^{10}$

$$(1-2x)^{10} = \sum^{10} (-2x)^i \binom{10}{i}$$

el coeficiente de x^{12} queda $(-2x)^{12}\binom{10}{12}$

$$\frac{x^3}{(1-2x)^{10}} = x^3\left(\frac{1}{(1-2x)^{10}}\right) = x^3\left(\sum_{i=0}^{\infty} CR^{10}_{i}(-2x)^i\right)$$

el coeficiente x^{12} en $\left(\frac{1}{(1-2x)^{10}}\right)$ es $CR^{10}_{12}(-2)^{12}$

$$4096\binom{21}{12} = 2^{12}\frac{21!}{12!\,9!}$$

$$\frac{x^3-5x}{(1-x)^3} = \frac{x^3}{(1-x)^3} - \frac{5x}{(1-x)^3}$$

Hallar $[a^{15}]\left(\frac{x^3-5x}{(1-x)^3}\right)$ equivale a

$$[a^{12}]\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right) - 5[a^{14}]\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right)$$

$$CR^3_{12} - 5\,CR^3_{14}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = (1+x)^4\left(\frac{1}{(1-x)^4}\right)$$

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

$$\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = \frac{1}{(1-x)^4}+\frac{4x}{(1-x)^4}+\frac{6x^2}{(1-x)^4}+\frac{4x^3}{(1-x)^4}+\frac{x^4}{(1-x)^4}$$

$$= CR^4_{15}+4CR^4_{14}+6CR^4_{13}+4CR^4_{12}+CR^4_{11}$$

Ejercicio 5

Verificar que $(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 6

Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

$$(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)^{-1}$$

$$= \frac{1}{(1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6)}$$

$$= \frac{1}{(1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6))}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^i$$

$$= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$$

$$+ \ldots ,$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$$

$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^m$ representa tire m veces un dado

$$x^m + m x^{m+1} \quad \ldots \quad x^{6m}$$

$$\uparrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^i$$

Ejercicio 6

Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

100, 200

100   1 manera   1111

200   2 maneras   112

300   2 maneras   22

400   3 maneras

$$x^{100} + 2x^{200} + 2x^{300} + 3x^{400}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{200}}\right) = (1+x^{100}+x^{200}\dots)(1+x^{200}+x^{300}$$

$$=$$

$$\left(\frac{1}{1-x^{100}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{200}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{500}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{1000}}\right)$$