Ejercicio 5
Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

$$h_{n+1} = h_n \longrightarrow h_n = c$$

Particular tomamos

$$(a+bn)2^n$$

$$t=1 \quad r=2$$

Tabla 10.2

	$a_n^{(p)}$
c, una constante	A, una constante
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbf{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbf{R}$	$A r^n$
$\operatorname{sen} \alpha n$	$A \operatorname{sen} \alpha n + B \cos \alpha n$
$\cos \alpha n$	$A \operatorname{sen} \alpha n + B \cos \alpha n$
$\boxed{n^t r^n}$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \cdots + A_1 n + A_0)$
$r^n \operatorname{sen} \alpha n$	$A r^n \operatorname{sen} \alpha n + B r^n \cos \alpha n$
$r^n \cos \alpha n$	$A r^n \operatorname{sen} \alpha n + B r^n \cos \alpha n$

$$(a+b(n+1))2^{n+1} = (a+bn)2^n + n2^{n-1}$$

$$2^{n+1}a + 2^{n+1}b(n+1) - 2^n(a+bn) = n2^{n-1}$$

$$2^{n-1}(4a+4b-2a) + n2^{n-1}(4b-2b) = n2^{n-1}$$

$$4b-2b = 1 \longrightarrow 2b = 1 \longrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$2a+2 = 0 \qquad a = -1$$

Encontramos una solución particular

$$\left(-1+\frac{n}{2}\right)2^n$$

$$\left(-1+\frac{n+1}{2}\right)2^{n+1} = c_n + n2^{n-1}$$
$$= \left(-1+\frac{n}{2}\right)2^n + n2^{n-1}$$

$$\left(-1+\frac{n}{2}\right)2^n + \frac{n}{2}2^{n-1}\cdot 2 = \left(-1+\frac{n}{2}\right)2^n + \frac{n}{2}2^n$$

$$= (n-1)2^n$$

$$\frac{(n-1)}{2}2^{n+1} = (n-1)2^n$$

Queremos que $c_0 + h_0 = 0$

$C_0 = -1 \rightarrow h_0 = 1, \; h_n = 1$

La solución buscada es:

$$1 + \left(-1 + \frac{n}{2}\right)2^n$$

Ejercicio 1

Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$

(b) $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$

(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$

→ (f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$

(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$

(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \ldots$$

$$1, 1, 1$$

(a) $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}$

$$1 + 6x + \binom{6}{2}x^2 + \cdots \binom{6}{6}x^6 = \sum^{6} x^i \binom{6}{i}$$

$= (1+x)^6$

(b) $\binom{6}{1}, 2\binom{6}{2}, 3\binom{6}{3}, \ldots, 6\binom{6}{6}, 0\ 0.$

$\binom{6}{1} + 2\binom{6}{2}x + 3\binom{6}{3}x^2 + 4\binom{6}{4}x^3 + \cdots + 6\binom{6}{6}x^5$

$6(1+x)^5$

(c) $1, -1, 1, -1$ $\qquad \sum_n^{\infty} (-x)^n$

$\frac{1}{1-x} \longrightarrow$ genera $1\ 1\ 1 \ldots$

$\frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$

genera $1\ -1\ 1\ -1 \ldots$

(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 \ldots$

$x^4 + x^5 + x^6 + \cdots$

$\frac{x^4}{1-x}$

f) $1\ 0\ 1\ 0\ 1 \ldots$

ya tenemos $1\ 1\ 1\ 1\ 1$

y tenemos $+\ 1\ -1\ 1\ -1\ 1$

$2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0 \ldots$

$$\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2}=\frac{1+x+1-x}{2(1-x)(1+x)}=\frac{2}{2(1-x^2)}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(x^2)^i$$

(g) 1 2 4 8 16 32 64

$$=\sum_{i=0}^{\infty}2^i x^i$$

$$\frac{1}{1-2x}$$

Ejercicio 1

Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C^6_0, C^6_1, C^6_2, \ldots, C^6_6, \ldots$
(b) $C^6_1, 2C^6_2, \ldots, 6C^6_6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

h) $0 \quad 0 \quad a^0 \quad a^1 \quad a^2 \ldots$

$$\frac{x^2}{1-ax}$$

i) $1, 0, 2, 0, 4$

$$\sum^{\infty}(2x^2)^i \qquad \frac{1}{1-2x^2}$$

j) $0\ 0, 1, b, a, b^2, a^2$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad b \quad 0 \quad b^2 \quad 0$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad a, \quad 0 \quad a^2$ $\qquad \frac{x^2}{1-(.ax^2)}$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad b \quad 0 \quad b^2$ $\qquad \frac{x^2}{1-bx^2} - x^2$

$$\frac{1}{1-\sqrt{b}x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (bx^2)^i = 1 + bx^2 + b^2x^4$$

$1 \quad b \quad 0 \quad b^2 \quad 0 \quad b^3$

$x^2 + bx^4 + b^2x^6 \ldots$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad b \quad 0 \quad b^2$

$0 \quad 0 \quad 0$

$$\frac{x^2}{1-ax^2} + \frac{x^2}{1-bx^2} - x^2$$

$$= \frac{x^2((1-bx^2)+1-ax^2) - (1-ax^2)(1-bx^2))}{(1-ax^2)(1-bx^2)}$$

$$= \frac{x^2(2-\cancel{x^2(b+a)} - (1-\cancel{x^2(a+b)}+abx^4))}{1-x^2(a+b+abx^2)}$$

$$= x^2\left(\frac{1+abx^4}{1-x^2(abx^2+a+b)}\right)$$

Ejercicio 2

Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

(a) $f(x) = (2x-3)^3$
(b) $f(x) = x^3/(1-x)$
(c) $f(x) = x^3/(1-x^2)$
(d) $f(x) = 1/(1+3x)$
(e) $f(x) = 1/(2-x)$
(f) $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \end{array}$$

$$(2x-3)^3 = \sum^{3} (2x)^i (-3)^{3-i} \binom{3}{i}$$

$$8x^3 + 4x^2(-3)(3) + 2x(9)3 - 27$$

1	3	3	1
8	-36	54	-27