Ejercicio 2

Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6,6,2,2,1,1)$ y $(6,2,6,2,1,1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 5

Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$x_1+x_2+x_3+x_4=19$

a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8 \quad \forall i$

Sabemos contar las soluciones

$$U \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=19 \\ 0 \leqslant x_i \end{cases}$$

Sabemos que son $\binom{19+4-1}{19} = \binom{19+4-1}{4-1}$

$\binom{22}{19} = \binom{22}{3}$

0 0 0 0 | 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0

$x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 1$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

$19 + (4-1)$ letras con 19 o
(4-1) |

¿ Nº palabras con 22 letras 19 o
3 | hay?

$$\frac{22!}{3!\,19!}$$

$$\binom{22}{3} = \binom{22}{19}$$

$A = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4)$ solucion de
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$
$0 \leq x_i \leq 8 \}$

$A_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4)$ Sol.
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$
$9 \leq x_1 \}$

$$A = U - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$
$$+ A_1 \cap A_2 + A_2 \cap A_3 \cdots$$

$|A_1|$ crea las soluciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$
$$9 \leq x_1$$

$$x_1 - 9 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 - 9$$

$$y_1 = x_1 - 9$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 & \\ 0 \leq y_1 & \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{3} \end{array}}$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|$$

$$|A_1 \cap A_2| \quad x_1 \geq 9 \quad x_2 \geq 9$$

$$y_1 = x_1 - 9 \quad y_2 = x_2 - 9$$

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$0 \leq y_i \quad 0 \leq x_i$$

$|A_i \cap A_j| = 4$

Vamos a tener $\binom{4}{2}$ intersecciones

$|A_i \cap A_j \cap A_k|$ $x_1 \geq 9$ $x_2 \geq 9$ $x_3 \geq 9$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 19$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$

$|A| = |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j|$

$$\binom{22}{3} - 4\binom{13}{3} + \binom{4}{2} 4$$

$$\frac{22!}{3!\,19!} - \frac{4(13)!}{3!\,10!} + \frac{4!\,4}{2!\,2!}$$

$$= \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} + 6 \cdot 4$$

$$= 11 \cdot 7 \cdot 20 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 11 + \cancel{4}$$

$$= 11 (7 \cdot 20 - 2 \cdot 13 \cdot 4) + \cancel{4}$$

$$11 (4 (\underbrace{7 \cdot 5 - 2 \cdot 13})) + \cancel{4}$$

$$11 \cdot 4 \cdot 9 + 4$$

$$4 \cdot 99 + 4 = 4(\cancel{100})$$

$$= 4\cancel{00}$$

$$\underline{420}$$

Ejercicio 5

Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$$A = \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \\ \underline{3 \leq x_3 \leq 7} \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

$$y_1 = x_1 - 3$$

$$A = \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 5 \\ 0 \leq y_2 \leq 6 \\ 0 \leq y_3 \leq 4 \\ 0 \leq y_4 \leq 8 \end{cases}$$

$$A_1 = \{ 0 \leq x_1 \leq 5 \} \qquad |A_1| \neq |A_2|$$

$$A_2 = \{ 0 \leq x_2 \leq 6 \}$$

$$A_3 = \{ 3 \leq x_3 \leq 7 \}$$

$$A_4 = \{ 0 \leq x_4 \leq 8 \}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$
$$0 \leq x_2 \leq 6$$
$$3 \leq x_3 \leq 7$$
$$0 \leq x_4 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 + x_4 = 19 - 3$$

$$y_3 = x_3 - 3$$

$$x_1 + x_2 + y_3 + x_4 = 16$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \\ 0 \leq y_3 \leq 4 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \end{array}\right\} \quad \text{Ej}$$

Ejercicio 2
Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

$$6+6+6+6+6+6 = 36$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 18$$

$$1 \leq x_i \leq 6$$

$$y_i = x_i - 1$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 = 12$$

$$0 \leq y_i \leq 5$$

$$\binom{12+6-1}{12}$$

$$A_1 = \{ y_1 \geq 6 \}$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 = 12$$

si $6 \leq y_1$

$$z_1 = y_1 - 6$$

$$z_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 = 6$$

$$\binom{6+6-1}{6}$$

$$y_1 \geq 6 \quad y_2 \geq 6$$

$$z_1+z_2+y_3+y_4+y_5+y_6 = 0$$

1

$$|A| = |U| - \sum |A_1| + \sum |A_i \cap A_j|$$

$$= \binom{17}{12} - 6\binom{11}{6} + \binom{6}{2}$$

hay maneras de menos 18

$$= \frac{17!}{5!\,12!} - \frac{6(11)!}{6!\,5!} + \frac{6!}{2!\,4!}$$

$$= \frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{5!} - \frac{6\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot}{5!}$$

$$+ \frac{6\cdot 5}{2}$$

$$= 17\cdot 4\cdot 7\cdot 13 - 6\cdot 11\cdot 3\cdot 2\cdot 7 + 15$$

17*4*7*13-6*11*3*2*7+15

$$= 3431$$

$$3431 + 1$$

1. Principio del Palomar (Sección 5.5)

Ejercicio 1
Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 2
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

$24 \times 60 \times 60 = 86.400$

Palomas: 100000 personas

Nidos 86.400 horas posibles

m palomas $\quad m > n$

n nidos

$\exists!$ un nido con mas de una paloma