

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

(b) También hallar
el coeficiente de

$$(2x)^i (4y)^j (2z)^k (5)^l$$

$$i+j+k+l=14$$

$$\frac{14!}{i!j!k!l!}$$

$$xy^3z^5$$

$$(2x)(4y)^3(2z)^5(5)^5 \leftarrow$$

$$\frac{14!}{3!5!5!}$$

$$i=1$$

$$j=3$$

$$k=5$$

$$l=14-i-j-k=5$$

$$(2x)(4y)^3(2z)^5(5)^5 = xy^3z^5(2 \cdot 4^3 \cdot 2^5 \cdot 5^5)$$

$$(2 \cdot 4 \cdot 2^5 \cdot 5^5) \frac{14!}{3!5!5!} xy^3z^5$$

Ejercicio 12

Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es $PR_{(n_1, \dots, n_r)}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Ejercicio 13

Dados $A = \{1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{1, 2, \dots, n\}$, contar la cantidad de funciones $f: A \rightarrow B$ tales que:

- (a) No hay restricciones.
- (b) f es inyectiva.
- (c) f es biyectiva
- (d) f es monótona creciente estrictamente.
- (e) f es monótona creciente. $\leftarrow E_y$.
- (f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \dots + r_n = m$.

$$(a) \quad f(1) \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$f(2) \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\vdots$$

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \dots \quad f(m)$$

$$n \times n \times n \times \dots \times n$$

$$= n^m$$

$$(b) \quad \{ f : f \text{ es inyectiva} \}$$

$$f \text{ es inyectiva si } \forall x, y, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \dots \quad f(m)$$

$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \dots \quad n-m+1$$

Para que exista una función
inyectiva $n \geq m$

Y en este caso tenemos

$$\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{n-(m-1)} = \frac{n!}{(n-m)!} = \text{Arr}_m^n$$

$$\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$
$$n(n-1)$$

(c) Biyectiva $n = m$

$f_{\text{Biyectiva}}$ es una función que es
inyectiva y sobreyectiva

Sobreyectiva $f: A \rightarrow B$

$$\forall y \in B \exists x: f(x) = y$$

$$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$f(x) = 1 \quad \forall x \text{ no es sobre}$$

$$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

Si f es inyectiva ¿ f es sobre?

$$\text{Im } f = \{1 \dots n\}$$

$$|\text{Im } f| = |\{1 \dots n\}|$$

En el caso que $n=m$
 f inyectiva $\Rightarrow f$ sobreyectiva

$\Rightarrow f$ es biyectiva

f es inyectiva $\Rightarrow f$ es biyectiva

¿cuántas funciones biyectivas hay
 $f: \{1 \dots n\} \rightarrow \{1 \dots n\}$?

$$\begin{array}{cc} f(1) & f(2) \\ n & n-1 \end{array}$$

$n!$ funciones biyectivas

(d) ¿Cuántas funciones $f: \{1 \dots m\} \rightarrow \{1 \dots n\}$
 estrictamente crecientes hay?

$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

$m > n$ no hay

Si $m=n$ hay una sola $f(x)=x$

$m < n$

$$f: \{1 \dots m\} \longrightarrow \{1 \dots m, m+1 \dots n\}$$

$$1 \leq f(1) < f(2) < f(3) < \dots < f(m) \leq n$$

$$I_m(f) \subset \{1 \dots n\}$$

$$|I_m(f)| = m$$

$$I \subset \{1 \dots n\} \quad |I| = m$$

$$1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_m \leq n$$

$$I = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

$$f(i) = x_i$$

$$f: \{1 \dots m\} \longrightarrow I \text{ monotonamente creciente}$$

hay una única f

$\exists$ ^{sub}conjuntos $I \subset \{1 \dots n\}$

que cumplen tener m elementos?

$$\begin{array}{ccccccc} f(1) & f(2) & \dots & f(m-1) & f(m) \\ 1 & 2 & & m-1 & m \\ 2 & 3 & & m & m+1 \\ \vdots & & & & \\ n-m & & & & \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & \\ 1 & 3 & 4 & & \end{array}$$

$$\{I: I \subset \{1 \dots n\}, |I| = m\} \leftrightarrow \{f: f \text{ es monotonamente creciente}\}$$

$\forall I \subset \{1, \dots, n\}$ tal que $|I| = m$

$\exists ! f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

tal que $\text{Im } f = I$

¿cuántos subconjuntos de n elementos
tiene un subconjunto de m elementos?

$$\binom{n}{m}$$

¿tenemos $\binom{n}{m}$ funciones estrictamente
crecientes.

f) Sea $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que
 $|f^{-1}(i)| = r_i$

$f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

1 es alcanzado	2 veces
2 es alcanzado	3 veces
3 es alcanzado	4 veces

⌋

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 3 \\ f(7) &= 3 \\ f(8) &= 3 \\ f(9) &= 3 \end{aligned}$$

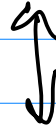
$(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 1 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 3 \\ f(7) &= 3 \\ f(8) &= 3 \\ f(9) &= 3 \end{aligned}$$

$(1, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 2 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 1 \\ f(7) &= 3 \\ f(8) &= 3 \\ f(9) &= 3 \end{aligned}$$

$(3, 1, 2, 2, 2, 1, 3, 3, 3)$



C A B B B A C C C

$f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

1 es alcanzado 2 veces
2 es alcanzado 3 veces
3 es alcanzado 4 veces



contar palabras de 9 letras

A repetida 2 veces

B " 3 veces

C " 4 veces

$$\frac{9!}{2!3!4!}$$

Sea $f: \{1 \dots m\} \rightarrow \{1 \dots n\}$ tal que

$$|f^{-1}(i)| = r_i \quad r_1 + r_2 + \dots + r_n = m$$

cada i es alcanzado
 r_i -veces

donde palabras de m letras

X_1 se repite r_1 -veces

X_2 se repite r_2 -veces

;

X_n se repite r_n -veces

$$\frac{m!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$$