Ejercicio 9

¿De cuántas formas se puede partir un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

$n=3$ $\quad \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$

Paso 1 Elegimos el primer par $\binom{6}{2}$

Paso 2 Segundo par $\binom{4}{2}$

Paso 3 tercer par $\binom{2}{2}$

total $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}$

Paso 1	Paso 2	Paso 3
$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{5,6\}$
$\{3,4\}$	$\{1,2\}$	$\{5,6\}$

$\{1, \ldots, 2n\}$ n subconjuntos

Paso 1 elijo 1º par $\binom{2n}{2}$

Paso 2 2º par $\binom{2n-2}{2}$

Paso 3 3º par $\binom{2n-4}{2}$

$\vdots$

Paso $n-1$ $n-1$º par $\binom{4}{2}$

Paso n $\binom{2}{2}$

Total $\underbrace{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}_{n!}$

Paso 1	Paso 2		Paso n
$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\ldots$	$\{2n-1, 2n\}$
$\{3,4\}$	$\{1,2\}$	$\ldots$	

$n!$ veces elijo el mismo subconjunto

Ejercicio 10
Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos usando la regla del producto.

$\{1,2,3\}$

$P(\{1,2,3\}) =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

8 subconjuntos

$P(\{1,2,3,4\}) =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
$\{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\},$
$\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

16 elementos

$$\underline{\#P(\{1,2,\dots,n\}) = 2\#P(\{1,2,\dots,n-1\})}$$

$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$\#P(\{1\}) = 2 \quad \Rightarrow \#P(\{1,\dots,n\}) = 2^n$

$$\#P(\{1,2,3\}) = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i}$$

$$\#P(\{1,2,\ldots n\}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = ?$$

$\{1,2,3,4\}$ $n=4$

$\{1,3\}$ 1010

Puedo representar un subconjunto con un número binario de n cifras

osea 2^n

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

Ejercicio 12

Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Supongamos que tenemos n letras $\rightarrow \dfrac{n!}{n_1!n_2}$

x_1 repetida n_1 veces

x_2 repetida n_2 veces

$\vdots$

X_r repetida n_r veces

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n =$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

$$= x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_r^n + n\, x_1\, x_2^{n-1}$$

$$\underline{x_1 x_2^2 x_3^{n-3}} \qquad \frac{n!}{2!\,(n-3)!}$$

$$(x+y+z)^4$$

$$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$
$$= x^4+y^4+z^4+4x^3y$$

$\underline{x^2yz =}$

$xxyz$	$xxzy$
$xyxz$	$xzxy$
$yxxz$	$zxxy$
$yzxx$	$zyxx$

$$\frac{4!}{2!}$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$$

el coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ $\quad n_1+n_2+\cdots+n_r=n$

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x+4y+2z+5)^{14}$

$$(x^5+x-1)^{10} = ((x^5)+(x)+(-1))^{10}$$

i, j, k tales que $\quad i+j+k=10$

$$(x^5)^i(x)^j(-1)^k = x^5 a$$

caso 1 $\quad i=1 \quad j=0 \quad k=9$

$x^5(-1)^9 = -x^5 \qquad$ 10 casos

caso 2 $\quad i=0 \quad j=5 \quad k=5 \quad \dfrac{10!}{5!5!}$

$$\left(-10-\frac{10!}{5!\,5!}\right)x^5$$