Ejercicio 1
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Ejercicio 2
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Ejercicio 3
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Ejercicio 4
Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

Ejercicio 5
Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 6
Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \; \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \; \forall n \geq 1$.

Ejercicio 7
Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 8
Probar que todo número natural mayor que 1 se descompone en factores primos.

Ejercicio 9
Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

Ej 8) Teorema Fundamental de la Aritmetica

$$\boxed{n \in \mathbb{N} \quad n > 1 \implies n = p_1 p_2 \cdots p_r \quad p_i \text{ primo } \forall\, 1 \leq i \leq r}$$

Def: n es primo si $Div(n) = \{1, n\}$

Inducción completa:

Paso base: $n = 2$

Puedo escribir $2=2$ $\quad 4 = p_1 p_2$ $\quad p_1 = 2$, $p_2 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 3=3 \\ 4=2\cdot 2=2^2 \\ 5=5 \\ 6=2\cdot 3 \\ 7=7 \\ 8=2\cdot 2\cdot 2 \\ 9=3\cdot 3 \end{array}\right\} \text{Ejemplos}$$

$10 = 2\cdot 5$

Hipótesis inductiva (Inducción fuerte)

$\forall K \quad 1 < K \leq n$

se cumple que K se descompone en primos

$K = p_1 p_2 \dots p_r \quad p_i$ primo $\forall i$, $1 \leq i \leq r$

Tesis inductiva

Quiero probar que se cumple:

$(n+1)$ se descompone en factores primos

$(n+1) = q_1 q_2 \dots q_s$, q_i primos $\forall i$, $1 \leq i \leq s$

Dem:

¿Qué puede pasar con los $Div(n+1)$?

En el caso en que $Div(n+1) = \{1, n+1\}$

$n+1$ es primo $\Rightarrow$

Podemos escribir $\underline{n+1 = n+1}$

es la desc. en primos de $n+1$

En el caso en que $n+1$ tenga algun divisor $k_1 \notin \{1, n+1\}$ podemos escribir

$n+1 = l \cdot k_1$, observamos que $\boxed{\begin{array}{l} 1 < l \leq n \\ 1 < k_1 \leq n \end{array}}$

Por H.I

$1 \leq k_1 \leq n$

$k_1 = p_1 p_2 \cdots p_r$

$l = p'_1 p'_2 \cdots p'_{r'}$

$$n+1 = l \cdot k_1 = \underbrace{p'_1 p'_2 \cdots p'_{r'} p_1 p_2 \cdots p_r}_{\text{primos}}$$

$n+1 = q_1 q_2 \cdots q_s \qquad s = r + r'$

$$q^i = \begin{cases} p'_i & 1 \leq i \leq r' \\ p_{i-r'} & r' \leq i \leq r+r' \end{cases}$$

Aca probamos que $\forall\ n > 1$ n se descompone en factores primos

Ejercicio 9

Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Principio del buen orden}} \\ \forall A \subset \mathbb{N} \ \exists \min A\end{array}}$$

$\Downarrow$

P.I.C.

Si tenemos una propiedad en los naturales, P que cumple
→ se cumple $P(n_0)$

→ Si se cumple $P(n)$
$\Rightarrow$ se cumple $P(n+1)$

Entonces P se cumple $\forall n \geq n_0$

PBO $\Longrightarrow$ PIC

Sea P una propiedad que cumple:

PB se cumple $P(n_0)$

$$\boxed{\text{Si se cumple } P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ se cumple}} \quad (*)$$

Queremos probar que $\forall n \geq n_0$
se cumple $P(n)$

Sea $A = \{ n \geq n_0$ tal que no se cumple $P(n) \}$

Supongamos por absurdo que $A \neq \emptyset$

Por el principio de buen orden $\exists\, a = \min A$

no se cumple $P(a)$

¿Qué pasa con $a-1$? $(a-1) \notin A$

$\Rightarrow$ Se cumple $P(a-1)$

pero como P cumple $\circledast$

Tiene que cumplirse $P(a)$

y acá llegamos a una contradicción, $a \notin A$

$\Rightarrow$ A tiene que ser vacío

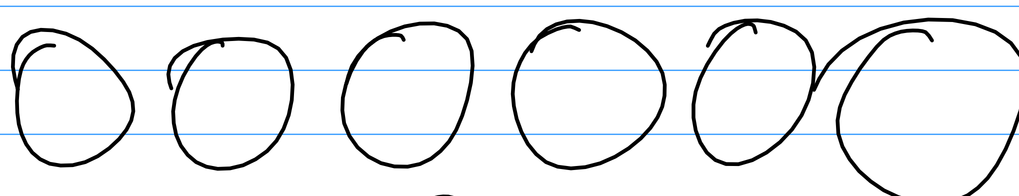
Ejercicio 1

Consideremos un alfabeto que posee 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Ejercicio 2

En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ej 1)



A B A B A B A

Supongamos que la primera letra es vocal

A __ __ __ __ __

En el primer lugar podemos elegir 5 vocales

En el segundo lugar podemos elegir entre 22 consonantes

A B

tenemos $5 \cdot 22$ palabras de largo 2

5 22 5 22 5 22

Palabras que comienzan en vocal que no tienen dos vocales o dos consonantes consecutivas son, en total:

$$5^3 (22)^3$$

Si mi palabra empieza en consonante

22 5 22 5 22 5

Voy a tener en total

$(22)^3 \cdot 5^3$ palabras

Concluyendo, una palabra que cumple la condición o bien empieza en

Vocal ó consonante

$5^3 22^3 + 5^3 22^3$

$= 2(5^3)(22)^3$

caso 1

Ej 2) $\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{3} \mid \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{3}$

caso 2

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{4} \mid \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{2}$

Case 3

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}_{5} \;\Big|\; \underbrace{6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{1}$$

total:

$$\binom{5}{3}\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\binom{5}{2} + \binom{5}{5}\binom{5}{1}$$