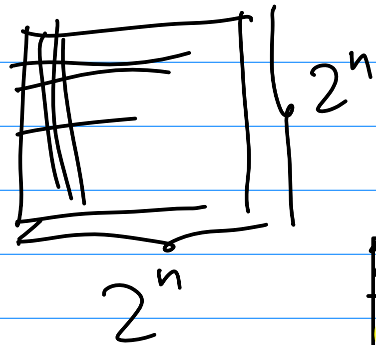
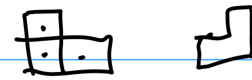
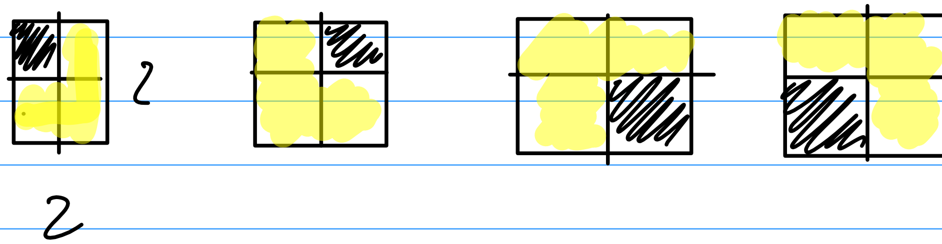
## Ejercicio 5

Sea $n$ un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.



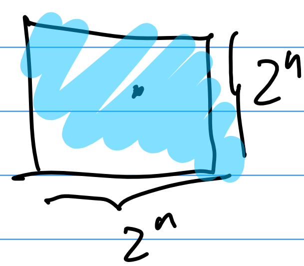



Para base $n=1$

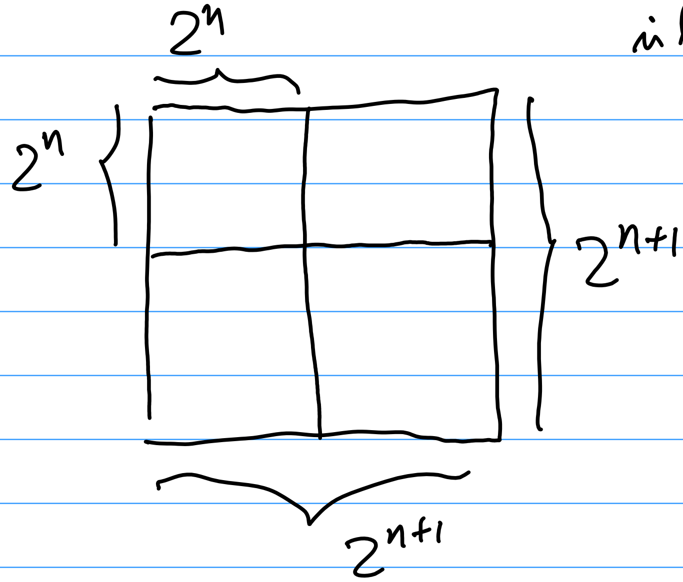



Hipótesis inductiva:

Puedo cubrir un cuadrado de $2^n \times 2^n$ sin un cuadrado cualquiera

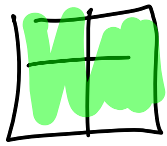



Tesis inductiva: Puedo cubrir un cuadrado de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ si le saco un cuadrado cualquiera

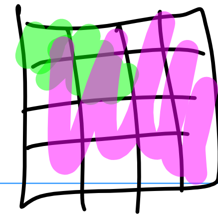



$$2^{n+1} \times 2^{n+1} = 4 \cdot 2^n \times 2^n$$

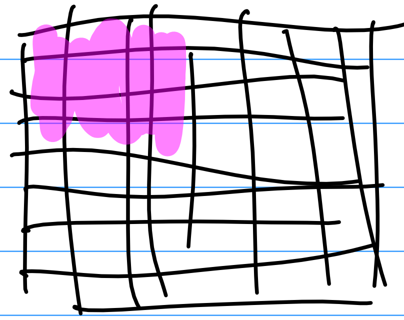
$n=1$

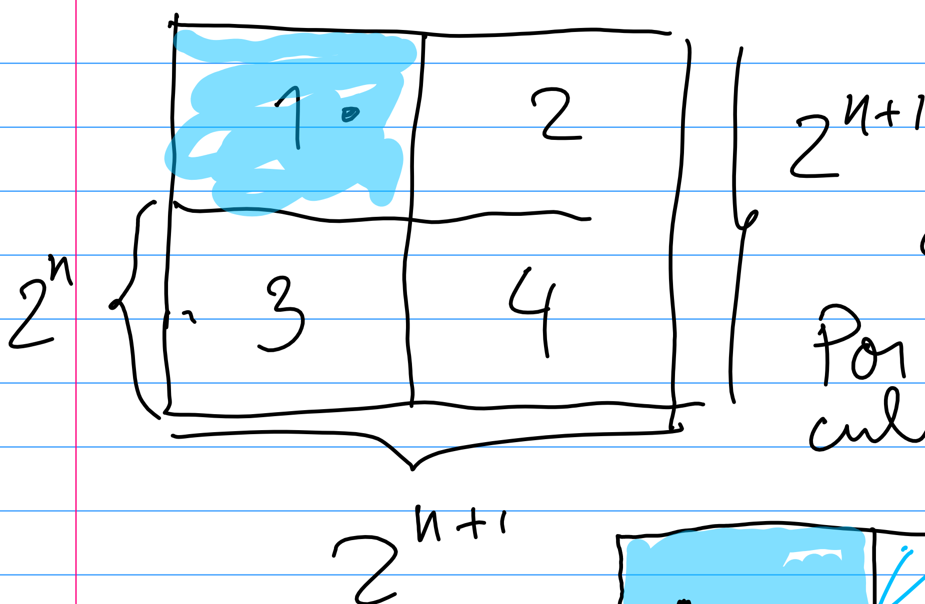


$n=2$



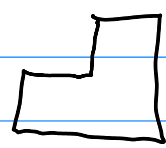
$n=3$

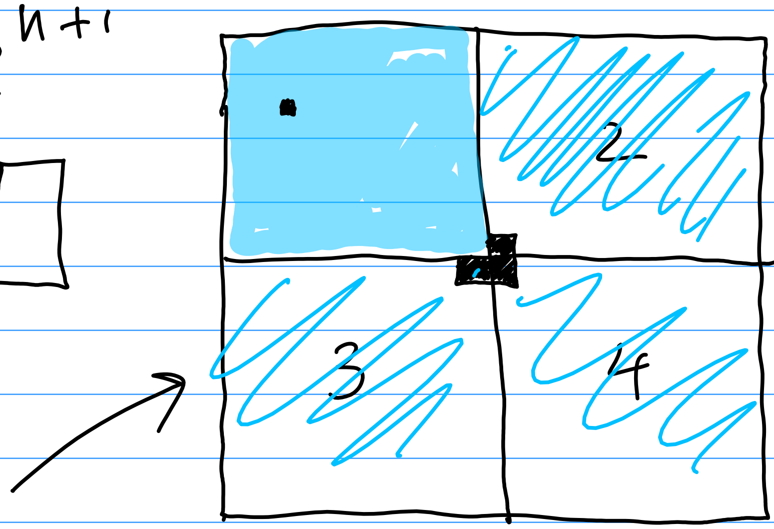


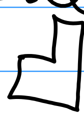



Caso en que falta un cuadradito del cuadrante 1

Por H.I. podemos cubrir el cuadrante 1






Ahora si sacamos un cuadradito de cada cuadrante, por HI podemos cubrir los cuadrantes 2, 3 y 4 y completamos el cubrimiento del cuadrado de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ con la  del centro

**Ejercicio 6**

Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ $\forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n$, $\forall n \geq 1$.

$a_1 = 3$

$a_2 = 10$

$a_3 = 30$

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$$

$$a_4 = a_{1+3} = 2a_{1+2} + 7a_{1+1} + a_1 = 2a_3 + 7a_2 + a_1 = 2\cdot 30 + 7\cdot 10 + 3 = 133$$

Queremos probar que $\forall n \geq 1$ $a_n \geq 3^n$

Paso base: Vale para $n=1$ $a_1 = 3 \geq 3^1$

" " $n=2$ $a_2 = 10 \geq 3^2$

" " $n=3$ $a_3 = 30 \geq 3^3$

Paso inductivo

Hipótesis inductiva $\left\{ \begin{array}{l} a_{n-2} \geq 3^{n-2} \\ a_{n-1} \geq 3^{n-1} \\ a_n \geq 3^n \end{array} \right.$

Quiero probar:

T.I

$a_{n+1} \geq 3^{n\ldots}$

Dem.:

$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_{n-2+3} &= 2a_{n-2+2} + 7a_{n-2+1} + a_{n-2} \\ &= 2a_n + 7a_{n-1} + a_{n-2} \\ \text{HI} &\geq 2\cdot 3^n + 7a_{n-1} + a_{n-2} \\ &\geq 2\cdot 3^n + 7\, 3^{n-1} + 3^{n-2} \\ &= 2\cdot 3^2\cdot 3^{n-2} + 7\cdot 3\cdot 3^{n-2} + 3^{n-2} \\ &= 3^{n-2}(2\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 1) = 3^{n-2}(40) \geq 3^{n-2}(27) \\ &= 3^{n-2}\cdot 3^3 \\ &= 3^{n+1} \end{aligned}$$

$\boxed{\begin{array}{l} (*)\ a > b \\ ac > bc \end{array}}$

Mediante las ultimos desigualdades

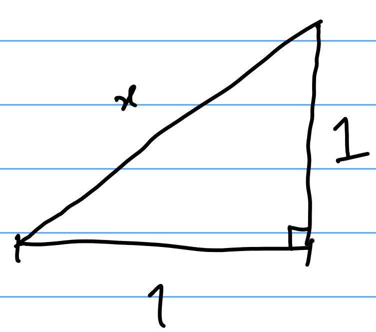
obtenemos que $a_{n+1} \geq 3^{n+1}$

En el paso inductivo mostramos que si se cumple la propiedad para $n$, $(n-1)$ y $(n-2)$ entonces $(n+1)$ tambien cumple la propiedad
En el paso base probamos que 1, 2 y 3 cumplen la propiedad

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$$(n-2) \,\&\, (n-1) \,\&\, (n) \longrightarrow n+1$$

**Ejercicio 7**
Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$.



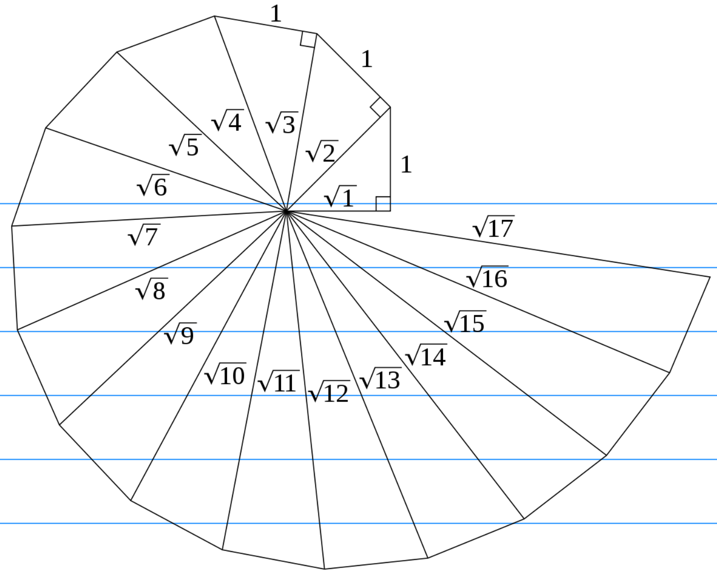

Por pitagoras tenemos

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2 \longrightarrow x = \sqrt{2}$$

Paso base $\quad n=1 \qquad \sqrt{1} = 1 \quad$ ✓

Paso inductivo:
Hipotesis inductiva:
Puedo construir un segmento de largo $\sqrt{n}$
Tesis
Puedo construir un segmento de largo $\sqrt{n+1}$


$$h^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$$
$$h^2 = n+1 \Rightarrow h = \sqrt{n+1}$$




**Ejercicio 8**
Probar que todo número natural mayor que 1 se descompone en factores primos. ← TFA

**Ejercicio 9**
Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

Grimaldi