

Ejercicio 1

Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n .

$$\sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Ejemplo

$$\sum_{i=0}^5 i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$$

Suma de Gauss

$$\sum_{i=0}^{100} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 100 + 1 = 101 \\ 99 + 2 = 101 \\ \vdots \\ 51 + 50 = 101 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (101) \times 50 = \\ \frac{(100+1)(100)}{2} \end{array}$$

$$\sum_{i=0}^n i = 0 + 1 + 2 + \dots + n-1 + n$$

$$\frac{n}{2} \left\{ \begin{array}{l} n+1 \\ n-1 + 2 \\ n-2 + 3 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i$$

$$n+1 \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right. \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ puntos}}$$

$$\frac{(n+1)n}{2}$$

Inducción completa

¿Cómo construimos los naturales?

Dado n puedo 'construir' el sucesor de n
 $S(n) = n+1$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N} \quad S(n) \neq n \end{array} \right.$$

cada número tiene un sucesor

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow n+1$$

Vamos a probar $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Para $n=0$, $\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$
 Vale la propiedad

Vamos a suponer que vale para un cierto $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

H.I

Queremos probar

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Comienzo con la prueba:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \underbrace{0+1+2+\dots+n}_{\text{H.I.}} + n+1$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^n i}_{\text{H.I.}} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \frac{2}{2}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Acabamos de probar $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

Osea, si n cumple la propiedad para n entonces n cumple para $n+1$

Ejercicio 2

Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n .

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 7^n - 2^n = 5 \cdot k$$

$$n=0 \quad 7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \cdot 0 \quad k=0$$

$$n=1 \quad 7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5 = 5 \cdot 1 \quad k=1$$

$$n=2 \quad 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45 = 5 \cdot 9 \quad k=9$$

Hypótesis Inductiva

$$\underline{7^n - 2^n = 5 \cdot k} \Rightarrow 7^n = 5 \cdot k + 2^n$$

Quiero probar (Teoría inductiva)

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \cdot k' \quad k' \in \mathbb{N}$$

Obtenemos que se cumple:

$$7 \cdot 7^n = (5+2) 7^n = (5+2)(5 \cdot k + 2^n)$$

$$\underline{7^{n+1} - 2^{n+1}} = (5+2)(5 \cdot k + 2^n) - 2^{n+1}$$

$$= 5(5 \cdot k + 2^n) + 2 \cdot 5k + \cancel{2^{n+1}} - \cancel{2^{n+1}}$$

$$= 5(\underbrace{5 \cdot k + 2^n + 2k}_{k'}) = 5(7k + 2^n)$$

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 7^{n+1} - 2^{n+1} + 0$$

$$= 7 \cdot 7^n - 2 \cdot 2^n - 7 \cdot 2^n + 7 \cdot 2^n$$

$$= 7(\underbrace{7^n - 2^n}_{5k}) + 2^n(7-2)$$

$$= 7(5k) + 2^n \cdot 5 = 5(\underbrace{7k + 2^n}_{k'})$$

Ejercicio 3

Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

$$\begin{array}{llll}
n=0 & 2^0 = 1 & \geq & 0^2 = 0 \quad \checkmark \\
n=1 & 2^1 = 2 & \geq & 1^2 = 1 \quad \checkmark \\
n=2 & 2^2 = 4 & \geq & 2^2 = 4 \quad \checkmark \\
n=3 & 2^3 = 8 & \not\geq & 3^2 = 9 \quad \times \\
n=4 & 2^4 = 16 & \geq & 4^2 = 16 \quad \checkmark
\end{array}$$

¿se cumple para $n \geq 4$?

Por inducción

H.I $2^n \geq n^2$

Queremos probar que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$$

Queremos que se cumpla

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Si se cumple que $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

equivale $n^2 \geq 2n + 1$

$$n^2 \geq 2n + 1 \quad \forall n \geq 3$$

PB $3^2 = 9 \geq 2 \cdot 3 + 1 = 6$

$$\text{H.I.} \quad n^2 \geq 2n + 1$$

$$(n+1)^2 \geq 2(n+1) + 1$$
$$\cancel{n^2 + 2n} + 1 \geq \cancel{2n} + 3$$

$$n^2 \geq 2$$

$$n_0 = 4$$