Convolución de funciones generatrices

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$H(x) = F(x)\cdot G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$H(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

$$\underbrace{a_j x^j}_{1} \cdot b_i x^i = a_j b_i x^{j+i}$$

$$= \underbrace{a_j \cdot b_{n-j}}\, x^n$$

primero elijo este $(j \leq n)$

$$j + i = n$$

$$\Rightarrow i = n - j$$

$$i = n - j$$

$$c_n \cdot x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j} \cdot x^n$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

$$F(x) = \underline{(1 - x - x^2 \cdots - x^6)^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$G(x)$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de los tirados de un dado (todos los necesarios)

incluyendo 0 tirados

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_k = n \quad 1 \leq c_i \leq 6$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$ (1)

$a_2 = 2$ (1, 1) (2)

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{?}{=} \underline{F(x)}$$

a_n:

$a_{n,k}$ la cantidad de manera de tirar k dados y que la suma me den

si $k > n$ $\quad a_{n,k} = 0$

$a_{6,7} = 0$

DESC 1

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$

a_0

$a_{n,0} = 1 \iff n=0$

$\boxed{a_{n,k} \text{ es la cantidad de soluciones de } c_1 + \dots + c_k = n \quad 1 \le c_i \le 6}$

$$F(x) = \frac{1}{(1 - \underbrace{x - x^2 \dots - x^6}_{})}$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots$$

$y = -(x+1)$, $y = \underbrace{x + x^2 + \dots + x^6}$

$$\frac{1}{1-x-1} \qquad \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x-x^2-\dots-x^6}$$

$$= 1 + (x+x^2+\dots+x^6) + (x+x^2+\dots+x^6)^2$$
$$+ (x+x^2+\dots+x^6)^3 + \dots\dots$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2-\dots-x^6} = 1$$
$$+ (x+x^2+\dots+x^6)$$
$$+ (x+x^2+\dots+x^6)^2$$

$\| \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$\vdots$

$$+ (x+x^2+\dots+x^6)^n$$

$\vdots$

$(x+x^2+\dots+x^6)^{n+1} \Longrightarrow$ el sumando diferente de cero con grado más chico de este polinomio es x^{n+1}

$\Rightarrow$ los únicos renglones que pueden tener sumandos de grado n son los renglones de 0 hasta n.

b_n

$b_{n,k}$ al coeficiente que multiplica a x^n en el renglón k.

DESC 2 $\quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{b_{n,k}}$

renglón k: $(x + x^2 + \dots + x^6)^k$

$$\underbrace{(x^{①} + x^{②} + \dots + x^{⑥})(x^{①} + x^{②} + \dots + x^{⑥}) \dots (x + \dots + x^6)}^{k \text{ veces}}$$

$$x^{d_1}\, x^{d_2} \dots x^{d_k} = x^n$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \leq d_1 \leq 6 & d_1 + \dots + d_k = n \\ 1 \leq d_2 \leq 6 & \\ \vdots & \\ 1 \leq d_k \leq 6 & \end{array}\right\} (1)$$

la cantidad de soluciones de (1) es $\underline{b_{n,k}}$

Porque

$a_{n,k} = b_{n,k}$ representan la cantidad de soluciones de la misma ecuación

$$\Rightarrow \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = b_n$$

D1 D2

DESC 1 y DESC 2

a_n y b_n son iguales

$\Rightarrow F(x) = G(x)$

(e) $\dfrac{3x^3}{1+x}$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \dots$$

$$y = x^2$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 0$

$\vdots$

(g) $$\frac{1}{1-2x} = 1 + (2x)^1 + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots$$

$$y = 2x$$

$$= 1 + 2^1 x + 2^2 x + 2^3 x + \dots$$

$a_0 = 2^0$

$a_1 = 2^1$ $\qquad a_n = 2^n$

$a_2 = 2^3$

$\vdots$

x^2

(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, \ldots$

$$F(x) = 1 + 0x + \underline{2x^2} + 0x^3 + \underline{2^2x^4}$$
$$0x^5 + 2^3 x^6 + \ldots$$

$$1 + (2^1x^2)^1 + (2^1x^2)^2 + (2^1x^2)^3$$

$$\frac{1}{1-2x^2} =$$

$$= 1 + 2x^2 + 2^2x^4 + 2^3x^6$$

$$= F(x).$$

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} \qquad g(x) = x^2$$

$$f \circ g(x)$$

$$F(x) + G(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$\sum a_n x^n \qquad \sum b_n x^n$$

$$\overline{\underline{| 0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3,}}$$

$$0, 0, 1, 0, a, 0, a^2, 0, a^3 \qquad = F(x)$$

$$+ \quad 0, 0, 0, b, 0, b^2, 0, b^3, 0 \qquad = G(x)$$