5 (c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $e_0 = 0$

(1) (2)

no homogenea

$$e_n = e_n^{(H)} + e_n^{(P)}$$

cumple (1) y (2) (3) solo cumple (1)

(3) $e_{n+1}^{(H)} = 2e_n^{(H)}$ orden 1

$$e_{n+1}^{(H)} - 2e_n^{(H)} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\boxed{e_n^{(H)} = \alpha(2)^n} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$e_0^{(H)} = \alpha \Rightarrow e_1^{(H)} = 2e_0^{(H)} \Rightarrow \ldots e_n = 2^n e_0$
$= 2^n \alpha$

$e_n^{(P)}$ $f(n) = \underbrace{r^n p(n)}_{} = 2^n \cdot (1)$

$f(n) = 2^n \Rightarrow r = 2$

¿ 2 es raiz del polinomio asociado

a la homogenea ?

el polinomio característico es $X-2$ $\not$ $\Rightarrow$ Si, es raiz simple 1

$$\Rightarrow e_n^{(P)} = \underbrace{r^n q(n)}\cdot n^1 = 2^n \cdot \underbrace{A}\, n$$

$q(n)$ tiene el mismo grado que $p(n)$

que es 0. $\Rightarrow q(n) = A$, $A \in \mathbb{R}$.

Para determinar el valor de A

$$2e_n + 2^n = e_{n+1}$$

$$2(2^n A \cdot n) + 2^n = 2^{n+1} A(n+1)$$

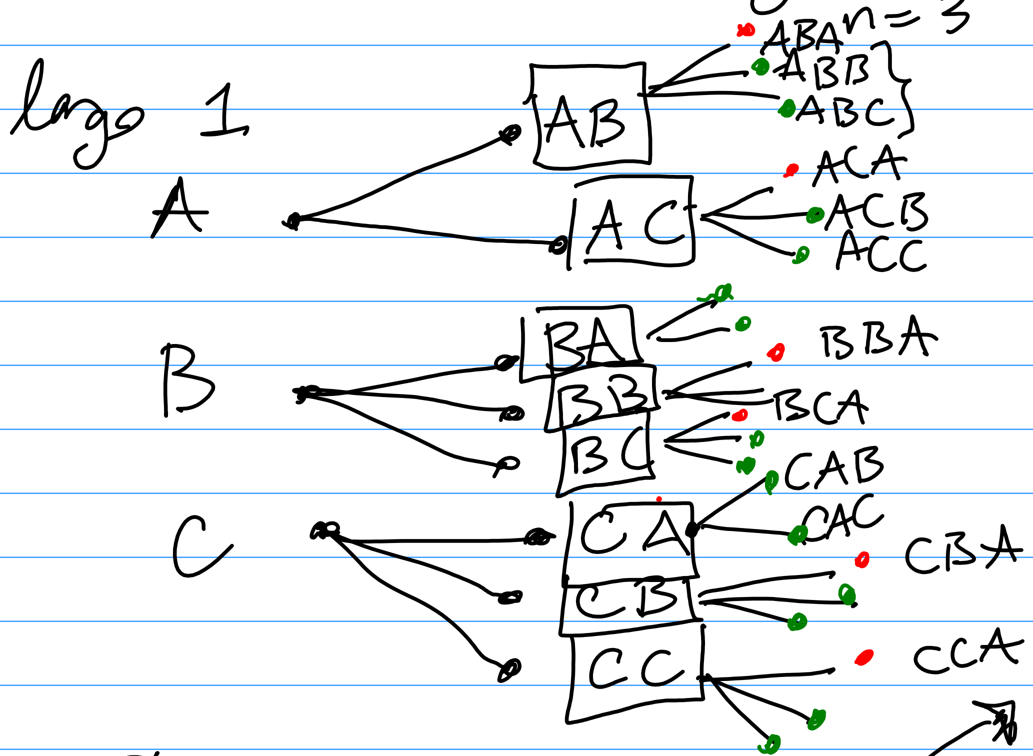
$$\cancel{2^n}(2An + 1) = 2\,\cancel{2^n} A(n+1)$$

$$2An + 1 = 2A(n+1)$$

$$\underbrace{2An - 2An}_{= 0} \underbrace{+1 - 2A} = 0$$

$$\Rightarrow A = +\frac{1}{2}$$

a_n es El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen letra A dos veces seguidas

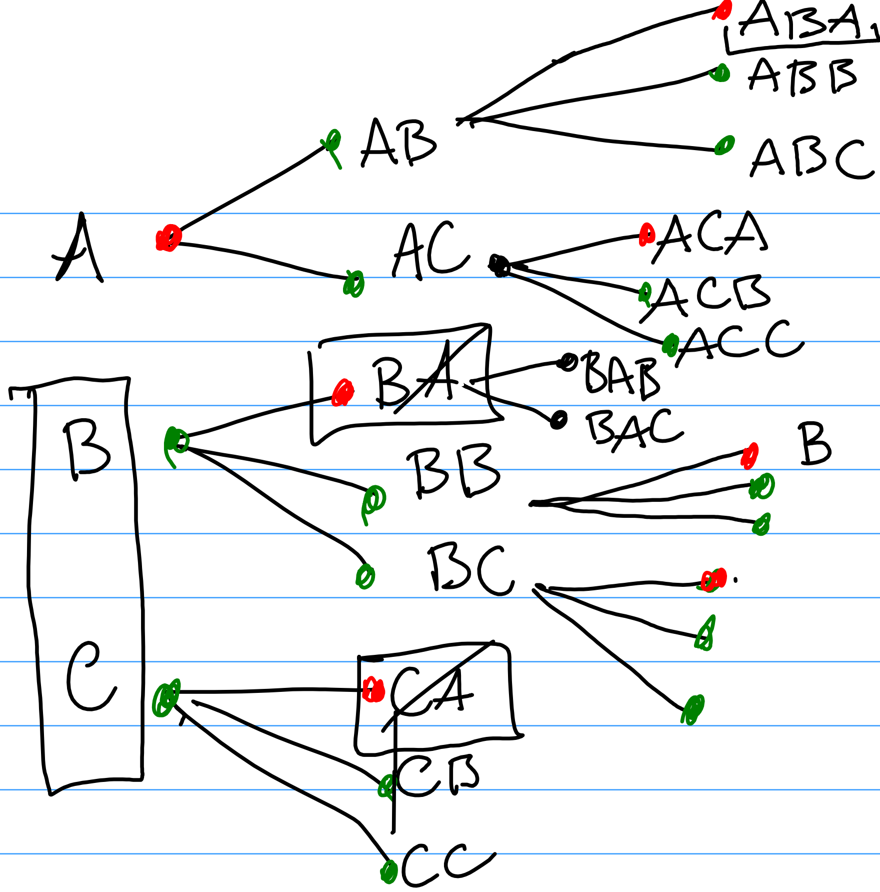


además terminan en A

$$a_n = \underbrace{a_n^{(B\,o\,C)}} + \underbrace{a_n^{(A)}}$$

$$= 2a_{n-1} + a_{n-1}^{(B\,o\,C)}$$

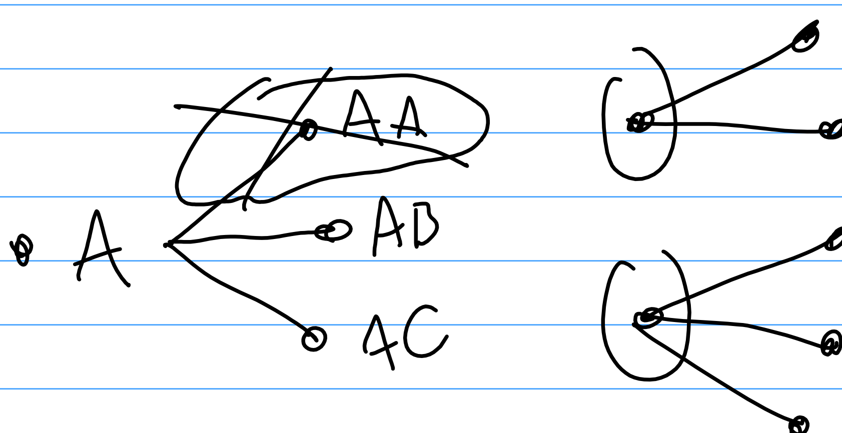
$$= 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$



$$a_n = a_n^{(A)} + a_n^{(B \circ C)}$$

$$= a_{n-1}^{(B \circ C)} + a_n^{(B \circ C)} = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}$$

$$= 2a_{n-2} + 2a_{n-1}$$



3^n

Funciones Generatrices

Polinomio $p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

$$F(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

la suma sigue

función generatriz asociada a la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$F(x) = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$a_n = 2^n$$

$$F(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$$

$$= 2^0 x^0 + 2^1 x^1 + 2^2 x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^n x^n \cdots$$

$a_n = 1$

Af: $\overbrace{(1+x+x^2+x^3+\dots)}(1-x) = 1$ quiero ver.

$\parallel$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

$- \underbrace{x(1+x+x^2+x^3+}\dots)$

$= 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 +$

$- [\cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 + \dots$

$= 1$

$$\boxed{(1+x+x^2+x^3+\dots) =: \frac{1}{(1-x)}}$$

Ejercicio 1

(a) $C^6_0, C^6_1, C^6_2, \dots, C^6_6, 0, 0, \dots$

$$a_n = C^6_n$$

$n > 6 \quad a_n = 0$

$$F(x) = \underbrace{C^6_0 + C^6_1 x^1 + \dots + C^6_6 x^6}$$

$$= (x+1)^6$$

$$(a+b)^6 = \underbrace{\sum_{i=0}^{6} C^6_i \, a^i \, b^{6-i}}$$

$a^i = x$, $b^{6-i} = 1$

si $a = x$
$b = 1$

$$= \sum_{i=0}^{6} C^6_i x^i$$

(b) ¿qué pasa cuando derivas la generatriz de la parte a)?

1 $\boxed{\underbrace{1+y+y^2+\cdots}=\frac{1}{1-y}}$

(c) $1, -1, 1, -1, 1$

$$F(x) = \underbrace{1 - x^1 + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots}$$

$$y = -x \qquad (-x)^{2k} = x^{2k}$$

$\frac{1}{1+x}$ en 1 $\qquad (-x)^{2k+1} = -(x)^{2k+1}$

$$\frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 + -x^3 + x^4 - x^5$$

$$= F(x)$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$G(x) = x \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{1,\,1,\,1,\,1,\,\ldots}$$

$$G(x) = x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 \ldots)$$

$$= (x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

(a_n) asociada a G $\quad 0, 1, 1, 1,$

$1, 1, 1, \ldots \qquad \frac{(1)}{1-x}$

$0, 1, 1, \ldots \qquad \frac{x}{1-x}$

$0, 0, 1, 1, \ldots \qquad \frac{x^2}{1-x}$

$F(x) \leftrightarrow a_0\ a_1\ a_2 \ldots$

$xF(x) \leftrightarrow 0, a_0, a_1, \ldots$

(d) la F.G asociada

a la sucesión

$0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 \ldots$

$$F(x) = \frac{x^4}{1-x}$$

(e) $3, -3, 3, -3$, $1, -1, 1, -1,$

$$F(x) = 3 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + \cdots$$
$$= 3 \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \cdots)$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{3}{1+x}$$

(f)

si en (1) $y = x^2$

(1) $$1 + y + y^2 + y^3 + \cdots = \frac{1}{1-y}$$

$$1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$1 + 0.x + 1.x^2 + 0.x^3 + 1.x^4 + \dots$$

$$a_n = \underset{\substack{\shortparallel \\ a_0}}{1}, \underset{\substack{\shortparallel \\ a_1}}{0}, 1, 0, 1 \to \frac{1}{1-x^2}$$

$$\underbrace{0, 0, 0,}\overbrace{\dots\dots\dots}$$