Sucesiones en recurrencia

1a) $\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$ homogenea

2a) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$ → no depende de ningún a_i

no homogénea.

$A a_{n+2} + B a_{n+1} + C a_n = 0$ Homogenea

$A b_{n+2} + B b_{n+1} + C b_n = f(n)$ no homogenea

$f(n) = r^n \cdot g(n)$ $r \in \mathbb{R}$

→ Polinomio

Ejemplos:

2a $a_n - a_{n-1} = f(n)$

$f(n) = n-1 = (1^n)(n-1)$

$$f(n) = 2^n = \underset{r^n}{\overset{\|}{2^n}} \cdot \underset{g(n)}{\overset{\|}{(1)}}$$

$$f(n) = 1 = \underset{r^n}{\overset{\|}{1^n}} \cdot \underset{g(n)}{\overset{\|}{1}}$$

$$f(n) = \underbrace{3}^{n} \cdot (5n^2+4)$$

Para resolver la recurrencia no homogenea distinguiremos según como es r.

Ejercicio 5

a) $C_{n+1} = C_n + n2^{n-1}$ $= f(n)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$C_0 = 0.$

$$C_n = C_n^{(H)} + \underline{C_n^{(P)}}$$

Sol HOMOGENEA

$C_{n+1}^{(H)} - C_n^{(H)} = 0$ orden 1

polinomio característico $=$ $\underline{x - 1 = 0}$ grado 1

$x = 1$ $\quad C_n^{(H)} = \alpha(1)^n = \alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

$C_n^{(H)} = \alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

¿ $C_n^{(P)}$? es una solución de la rec.
(necesariamente)
que no cumple la condición inicial.

Le vamos a llamar sol. particular.

$C_n^{(P)}$, • $f(n) = n\boxed{2}^{n-1}$

• raiz del polinomio característico ~~es~~ $\boxed{1}$.

$f(n) = r^n . P(n) =$

$r, P \qquad n2^{n-1} = P(n)\, r^n$

$r = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 2^n$

$P(n) . 2\, 2^{n-1}$

f

$P(n) = 1 \qquad f(n) = 2^n . 1 \neq n 2^{n-1}$

$r = 2 \quad f(n) = 2^n . P(n) = 2^{n-1} . n$

$$P(n) = \frac{2^{n-1} . n}{2^n} = \frac{n}{2}$$

$f(n) = \frac{n}{2} . 2^n$

la base r es $\underline{2}$ y el polinomio P tiene grado 1.

Caso 1   la raiz del polinomio característico es 1
$\neq$
la base r de la parte no homogenea es 2.

$\Rightarrow \quad C_n^{(p)} = r^n q(n)$ → tiene el mismo grado que $P(n)$.
$= 2^n q(n)$
$= 2^n . (An+B)$

(el polinomio P tq $f(n) = r^n P(n)$)

$P(n) = \frac{n}{2}$ tiene grado 1

$\Rightarrow q(n)$ tiene grado 1
$q(n) = An + B \quad , \quad A, B \in \mathbb{R}$

$$C_n - C_{n-1} = 2^{n-1} . n \quad (1)$$

quiero $C_n^{(p)}$ solución de la recurrencia de arriba (1)

$\rightarrow 2^n (An+B) - 2^{n-1} \overbrace{(A(n-1)+B)} = 2^{n-1} . n$

$2\,2^{n-1}$

$$\cancel{2^{n-1}}\left(2(An+B)-(A(n-1)+B)\right)=\cancel{2^{n-1}}\cdot n$$

$$2(An+B)-(A(n-1)+B)=n$$

$$\underbrace{2An}\;-\underbrace{An}\;\underbrace{-n}\;+2B+A-B=0$$

$$(A-1)\underline{n}+(B+A)=0$$

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-1=0\\ B+A=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-A=-1\end{cases}$$

$$q(n)=n-1$$

$$C_n^{(P)}=2^n\cdot q(n)=2^n(n-1)$$

cumple la recurrencia.

$$C_0^{(P)}=2^0\cdot(0-1)=-1$$

$$C_n=C_n^{(P)}+C_n^{(H)}\overset{*}{=}2^n(n-1)+\alpha$$

$C_0 = 0$

$C_n = 2^n(n-1) + \alpha \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$n = 0$

$C_0 = -1 + \alpha \Rightarrow \alpha = \underline{1}$

$\parallel$

0

$C_n = \underbrace{2^n(n-1)} + 1$

$f(n) = \underline{r}^n \cdot P(n)$

HOMOGENEA

- $\underline{\text{Orden } 2}$ $\quad Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + C = 0$

$\hookrightarrow Ax^2 + Bx + C = 0 \quad , \lambda_1, \lambda_2$

- $\underline{\text{Orden } 1}$ $\quad A a_{n+1} + B a_n = 0 \qquad \lambda$ raiz

$\hookrightarrow Ax + B \qquad a_n = \lambda^n \cdot \alpha$

- $\underline{\text{orden } 2}$: $\circ\, \underline{\text{caso I}}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$a_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n$

○ Caso II raíz doble λ

$$a_n = \alpha(\lambda)^n + \beta . n(\lambda)^n$$

NO HOMOGENEA

CASO 1

hallamos $a_n^{(p)}$ cuando $f(n) = 2^{n-1} n = r^n p(n)$

$2 = r$

polinomio característico

raíz $1 = \lambda$

si $\lambda \neq r$

$\Rightarrow a_n^{(p)} = r^n q(n) \longrightarrow$ mismo grado que $p(n)$.

CASO 2

$f(n) = r^n p(n)$.

y r se raíz del polinomio característico de la homogenea con multiplicidad 1 (raíz simple, no raíz doble)

$$a_n^{(p)} = r^n q(n) . n$$

Caso 3 $f(n) = r^n . p(n)$

y r es raíz del polinomio característico de la homogenea con multiplicidad 2 (raíz doble)

$$a_n^{(P)} = r^n \cdot q(n) \cdot n^2.$$

la solución de una recurrencia no homogénea con la condición inicial

$$a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)}$$

Usamos los condiciones iniciales para fijar los valores de α y β! (de la homogenea)

5 b $\quad d_n = \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{2} d_{n+1} + 1$

$$\frac{1}{2} d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2} d_{n-1} + 1 = 0$$

pasar a la homogenea

recurrencia de orden 2

$$\frac{1}{2} d_{n+1}^{(H)} - d_n^{(H)} + \frac{1}{2} d_{n-1}^{(H)} = 0$$

polinomio caracteristico

$$\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

grado 2

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$$

polinomio caracteristico con raiz doble 1

$$d_n^{(H)} = \alpha (1)^n + \beta n (1)^n$$

$$d_n^{(H)} = \alpha + \beta n$$

Quiero hallar una solución particular

quien es $f(n) = -1 = r^n p(n) = 1^n (-1) \Rightarrow \boxed{r=1}$

raíces del polinomio característico. $\boxed{\text{raíz doble } 1}$

r es raíz doble del polinomio característico. (caso 3)

$$d_n^{(P)} = r^n . q(n) . n^2 = 1^n q(n) . n^2$$

$$= q(n) . n^2$$

el mismo grado que $p(n)$ que es 0

$$q(n) = A$$

$$d_n^{(P)} = \underline{A} . n^2$$

$$d_n = \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{2} d_{n+1} + 1$$

$$An^2 = \frac{1}{2} A (n-1)^2 + \frac{1}{2} A (n+1)^2 + 1$$

$-2An$

n

$$0 = \cancel{An^2} - \cancel{\frac{1}{2}A(n^2} - 2n + 1) - \cancel{\frac{1}{2}A(n^2} + 2n + 1) - 1$$

$$= \cancel{+n} \cancel{-n} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A - 1$$

$$= -A - 1$$

$$-A = 1$$

$$\boxed{A = -1}$$

$$d_n^{(P)} = -n^2$$

$$d_n = d_n^{(H)} + d_n^{(P)} = \alpha + \beta n - n^2$$

hallar α y β para que se cumplan las condiciones iniciales

$d_0 = 0$

$d_{100} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$n=0$ $\quad d_0 = \alpha + \beta \cdot 0 - 0^2 = \alpha$

$n=100$ $\quad d_{100} = \alpha + \beta(100) - (100)^2$

$d_{100} = 0$

$$\beta(100) - (100)^2 = 0$$

$$\boxed{\beta = \frac{(100)^2}{100} = 100}$$

$$d_n = 100 \cdot n - n^2$$