

Clase pasada

Ej 4

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_7 = 31 \quad (x_1, \dots, x_7) \\ 0 \leq x_1 \leq 9 \\ 0 \leq x_2 \leq 9 \\ \vdots \\ 0 \leq x_7 \leq 9 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ x_i \in \mathbb{N} \end{array}$$

Ej 1 los naturales entre 1 y 105
que :

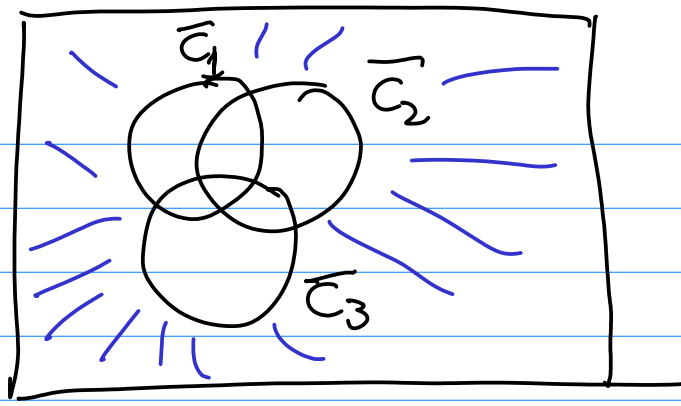
no sean múltiplos de 3, C_1

" " " " 5, C_2

y " " " " 7, C_3

empiezo contando los que no cumplen

alguna de las tres condiciones, esta cantidad
se la resto al total



los que están en $\overline{C_1}$
son los múltiplos
de 3.

Si quiero contar los elementos que
cumplen 3 condiciones a la vez

C_1, C_2 y C_3

puedo contar ^{¿cómo?} los que no cumplen
(C_1, C_2 y C_3)

O sea no cumplen C_1

($\emptyset$ no excluyente) no $\emptyset$ cumple C_2
 $\emptyset$ no cumple C_3

$A_1 = \{ \text{los elementos que no} \\ \text{cumplen } A_1 \}$

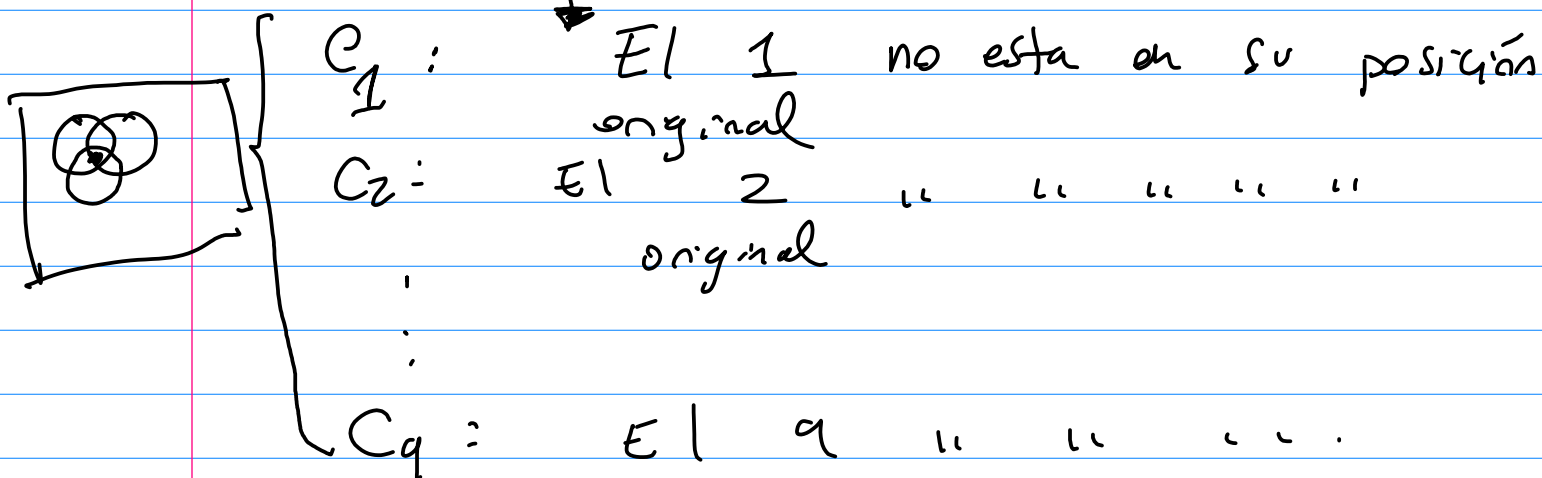
$\vdots$

$A_3 = \{ \text{los elementos que no} \\ \text{cumplen } A_3 \}$

Ejercicio 6

Calcular cuantas permutaciones de los
digitos 123... q

amplen que a) no hay ningún dígito
en su posición original.



Quiero hallar ~~los~~ que no amplen
que no hay ningún dígito en su
posición original.

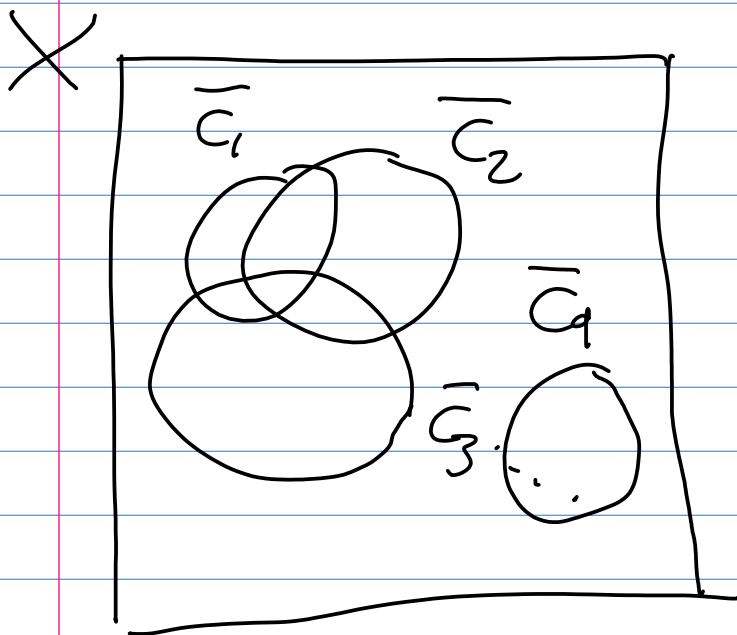
→ Considero $X = \{ \text{todas las permutaciones posibles} \}$

$$|X| = n = q!$$

los que
 $\rightarrow$ no cumplen simultáneamente

$C_1, \dots, C_q$ son los que

no cumplen alguna
 de las q condiciones



$$\overline{C_1} \cup \overline{C_2} \cup \dots \cup \overline{C_q}$$

$A_1 = \{ \text{los permutaciones que no cumplen } C_1 \}$

$A_1 = \{ \text{los permutaciones que tienen el 1 en su pos original} \}$

$A_q = \{ \text{los perm. que no cumplen } C_q \}$

$$\sum_{i=0}^n$$

$$\textcircled{*} |A_1 \cup \dots \cup A_q| = |A_1| + \dots + |A_q|$$

$$- \sum |A_i \cap A_j|$$

$$i, j \in \{1, \dots, q\}$$

$$i \neq j$$

$$+ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$i, j, k \in \{1, \dots, q\}$$

$$i, j, k \text{ distinct}$$

$$\dots + |A_1 \cap \dots \cap A_q|$$

$|A_1| = |\{ \text{permutaciones de 9 elementos} \\ \text{que tienen a 1 en su pos original} \}|$

1 — — — — —

$$|A_1| = 8!$$

8 espacios
8 números

$|A_2| = |\{ \text{permutaciones de 9 elementos} \\ \text{que tienen al 2 en su pos original} \}|$

— 2 — — — — —

8 espacios
y 8 números

$$|A_2| = 8!$$

⋮

$$|A_9| = 8!$$

$$|A_1 \cap A_2| = |\{ \text{las permutaciones que tienen al 1 y al 2 en su posición original} \}|$$

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{\quad} & \dots & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \end{array}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 7! \quad \begin{array}{l} 7 \text{ números} \\ 7 \text{ lugares} \end{array}$$

$$|A_i \cap A_j| = 7!$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \underline{i} & & \underline{j} & \dots & \dots \\ & & & i & & j & & \end{array}$$

$$12 \dots 9$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 6!$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| = (9-r)!$$

Sustituyendo en $\textcircled{*}$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_9| = 8! \times 9$$

$$- \left(\sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, 9\} \\ i \neq j}} 7! \right)$$

$$\rightarrow \text{hay } \binom{9}{2} = C_2^9 \text{ sumandos}$$

$$+ \left(\sum_{i, j, k \in \{1, \dots, 9\}} 6! \right)$$

$$\rightarrow \binom{9}{3} = C_3^9$$

...

$$\dots + 1$$

$$= \left[8! \cdot 9 - 7! \binom{9}{2} + 6! \binom{9}{3} - 5! \binom{9}{4} + 4! \binom{9}{5} - 3! \binom{9}{6} + 2! \binom{9}{7} - 1! \binom{9}{8} + 0! \binom{9}{9} \right]$$

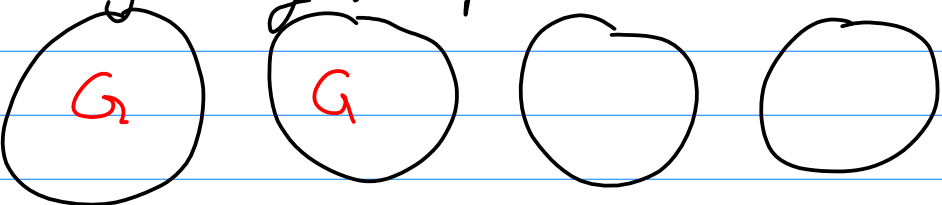
Al total de permutaciones posibles
le restamos los elementos que
no cumplen alguna de las 9 condiciones

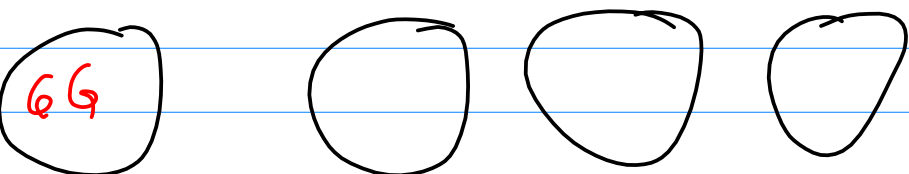
$$9! - \underbrace{|A_1 \cup \dots \cup A_9|}_{\substack{= 9! - 8! \cdot 9 + 7! \binom{9}{2} - \dots \\ - 0! \binom{9}{9}}}$$

distribuir
 6 perros
 2 gatos
 en 4 escondites

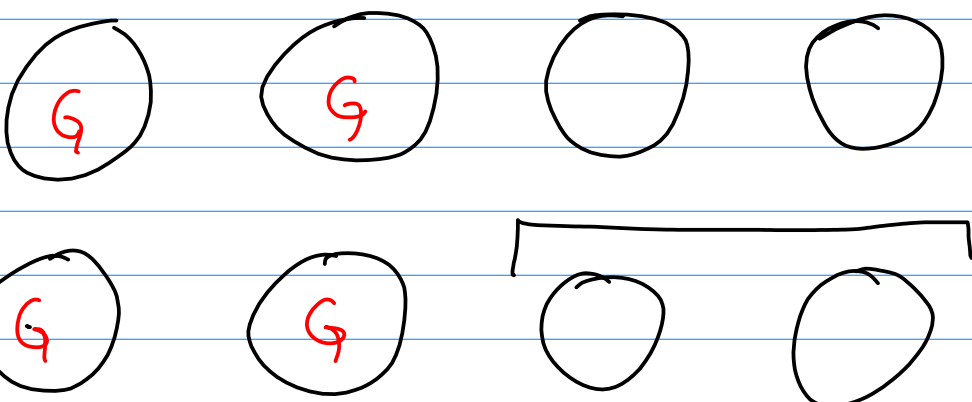
se utilizan todos los escondites

no puede haber perros y gatos juntos.
 [Si los gatos y los perros son idénticos]

caso (1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

caso (2)  4

Primero los gatos y después los
 perros.

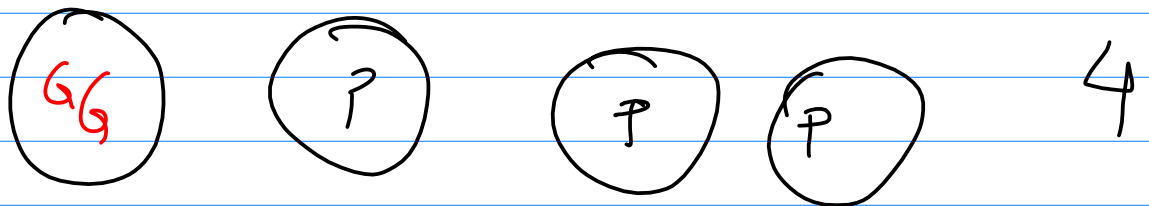
caso (1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Quiero distribuir 6 perros en

2 lugares (de modo que haya
por lo menos
un perro en
cada lugar)

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = 6 & x_1 + x_2 = 4 \\ \hline 1 \leq x_1 & 0 \leq x_1 \\ 1 \leq x_2 & 0 \leq x_2 \\ & CR_4^2 \end{array}$$

caso (2)



$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$1 \leq x_1$$

$$1 \leq x_2$$

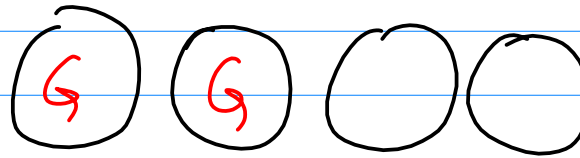
$$1 \leq x_3$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 & CR_3^3 \end{matrix}$$

$$0 \leq x_1$$

$$0 \leq x_2$$

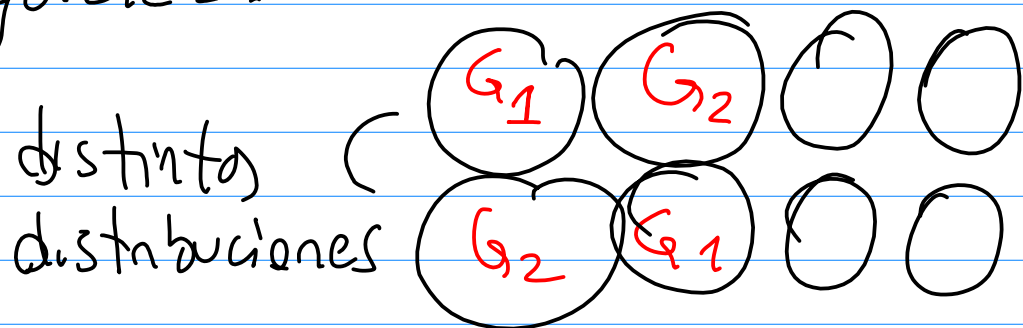
$$0 \leq x_3$$



caso (1) + caso (2)

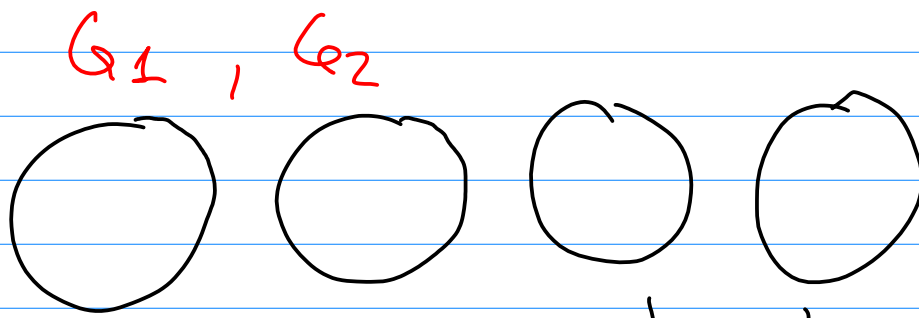
$$= \binom{4}{2} \cdot CR_4^2 + 4 \cdot CR_3^3$$

→ Si los perros y los gatos son distinguibles.



$Sob(m, n) \rightarrow$ contar la cantidad de funciones sobreyectivas
 $\{ f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ elementos} \}$

Caso ① Distribuir gatos (diferente especie) ^{antes en}



$$A_2^4 = 4 \cdot 3$$

P_1, P_5

P_6

distribuir a los 6

perros, todo escote
tiene al menos
un perro

$$f: \{P_1, \dots, P_6\} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$f(P_1) = 1$$

$$f(P_6) = 2$$

$$f(P_2) = 1$$

$$f(P_5) = 1$$

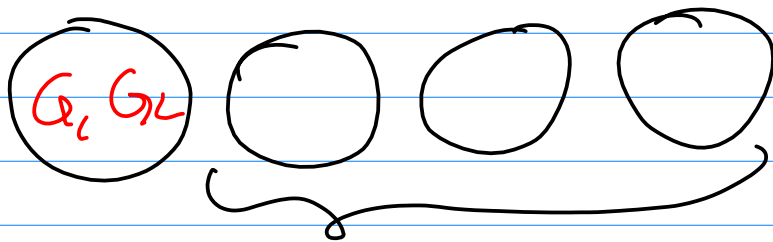
f sobreyectiva.

lo que queremos es contar
 $\text{Sob}(6, 2)$

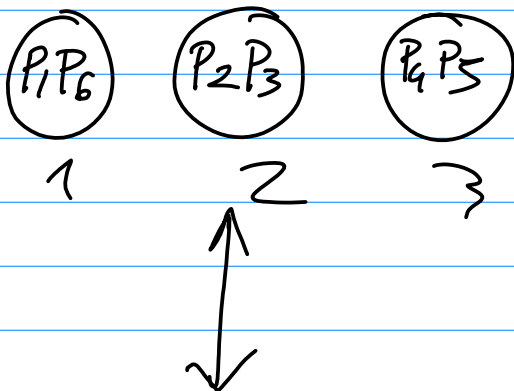
caso (1) $(4 \cdot 3) \times \text{Sob}(6, 2)$

caso (2)

4 maneras de elegir el escondite
 de los gatos (si los gatos se esconden juntos)



los perros se distribuyen en
 3 lugares



$$f(P_6) = 1$$

$$f(P_5) = 3$$

$$f(P_4) = 3$$

$$f: \{P_1, \dots, P_6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$f(P_1) = 1 \quad f(P_2) = 2 \quad f(P_3) = 2$$

ningún escondite quede vacío



f es sobreyectiva.

la cantidad de maneras de distribuir los perros es $\text{sob}(6,3)$

$$\text{Caso (2)} \quad 4 \times \text{sob}(6,3)$$

En total

$$\text{Caso (1)} + \text{Caso (2)}$$

$$= 4 \times 3 \times \text{sob}(6,2) + 4 \times \text{sob}(6,3)$$

¿ $\text{sob}(6,3)$?

C_1, C_2 y C_3
simultáneamente

C_1 el 1 esta en la
imagen

C_2 el 2 " " "

C_3 el 3 " " "

↓ construyo 3 conjuntos con la negación de las condiciones

$A_1 = \{ \text{las funciones tales que el 1 no este en la imagen} \}$

$$A_1 \subseteq X = \{f: \{1, \dots, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}\}$$

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c| = \underbrace{|X|} - \underbrace{|A_1 \cup \dots \cup A_3|}$$