Principio de inclusión-exclusión

¿$|A \cup B|$? $|A| \to$ la cantidad de elementos de A.

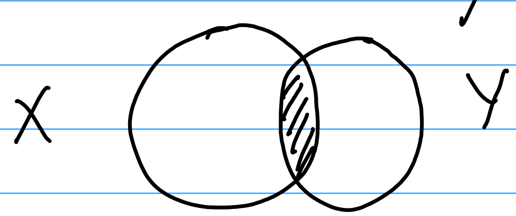
¿$|A_1 \cup \dots \cup A_n|$? $\#A$

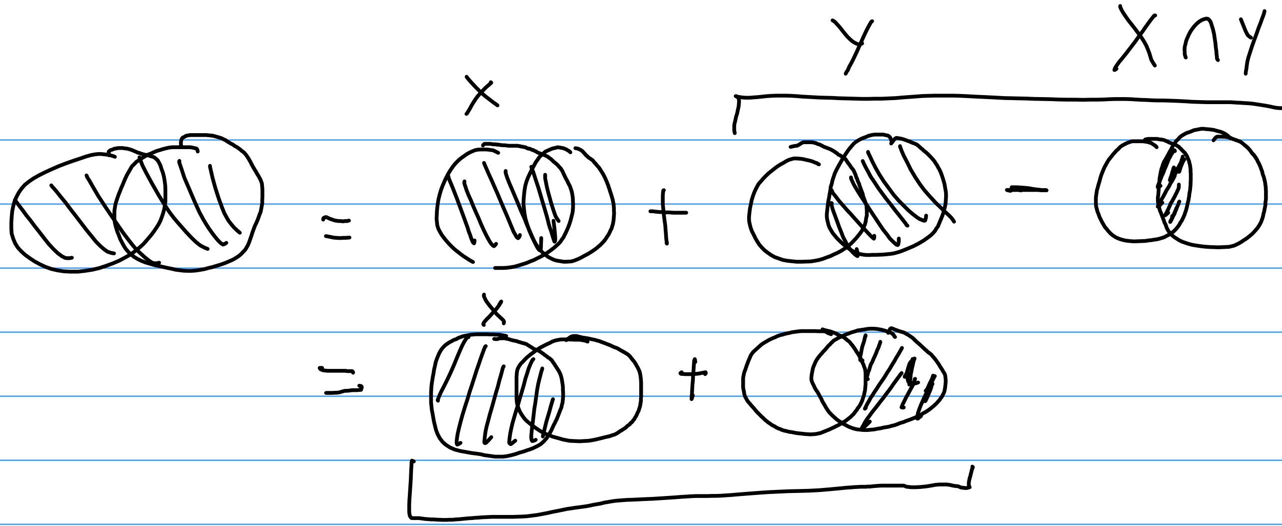
Si queremos la cantidad de palabras de 3 letras (abecedario de 23 letras) que empiezan o terminan con A.

Ejemplos
$\underline{A}\ \underline{L}\ \underline{V}$
$\underline{R}\ \underline{S}\ \underline{A}$
$\underline{A}\ \underline{T}\ \underline{A}$

$X = \{$palabras de 3 letras que terminan en A$\}$
$Y = \{$ " " " " que empiezan en A$\}$

¿$|X \cup Y| = |X| + |Y|$? NO





$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$= (23)^2 + (23)^2 - 23.$$

X : __ __ $\underline{A}$ — $(23)^2$ palabras que terminan A

23 abecedario

Y : $\underline{A}$ __ __ — $(23)^2$ palabras que empiezan

$X \cap Y$: $\underline{A}$ __ $\underline{A}$ — 23 palabres que empiezan y terminan en A

$105 = 3 \times 5 \times 7$

múltiplo de 3

$|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$

$A_3 = \{ n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 105 , n = \dot{3} \}$

$A_5 = \{ n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 105 , n = \dot{5} \}$

$A_7 = \{ n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 105 , n = \dot{7} \}$

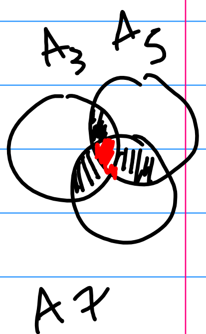
A_3 1 2 3 4 5 6 ..... 15 .... 21 ...

A_5 1 2 3 4 5 6 15 35

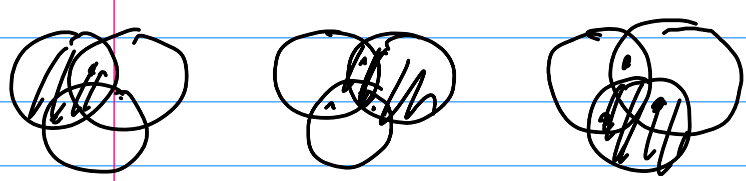
A_7 1 2 ..... 7 ... 21 35

$$¿|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = \underbrace{|A_3| + |A_5| + |A_7|}\ldots?$$

- hay elementos contados exactamente 2 veces
- hay elementos contados " 3 veces



$$|A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_5 \cap A_7|$$
$$- |A_7 \cap A_3| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| .$$

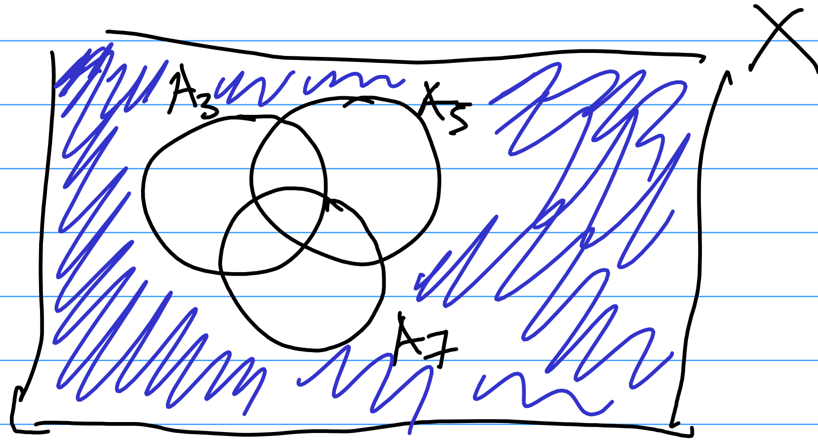


$$
\boxed{\begin{aligned}|A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_3| + |A_5| + |A_7| \\ &\quad - \left(|A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_7|\right) \\ &\quad + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|.\end{aligned}}
$$

$$
\begin{aligned}|A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| \dots + |A_n| \\ &\quad - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{distintos}}} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad \vdots \\ &\quad (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|\end{aligned}
$$

1 a) ¿Cuántos naturales entre 1 y 105 no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

quiero lo azul



$X = \{ n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 105 \}$

$(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c$ adentro de X

$|(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c| = |X| - |(A_3 \cup A_5 \cup A_7)|$

$= |X| - (|A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5|$
$- |A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|)$

$\downarrow$

$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_3| + |A_5| + |A_7|$
$- |A_3 \cap A_5| - |A_5 \cap A_7|$
$- |A_7 \cap A_3|$
$+ |A_3 \cap A_7 \cap A_5|$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$|X| = 105$$

$$|A_3| = \frac{105}{3} = 5 \times 7 = 35$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 105

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 . . 15 . . . .

$$|A_5| = \frac{105}{5} = 3 \times 7 = 21$$

$$|A_7| = \frac{105}{7} = 15$$

¿ $|A_3 \cap A_5|$? $A_3 \cap A_5$ son múltiples de 3 y de 5.

1 2 3 4 5 6 7 15

son los multiplos de 15.

$n = p_1 \cdots p_s$ n es múltiplo de 3 y de 5

$p_i = 5$, $p_j = 3$

n es multiplo de 15.

$$|A_3 \cap A_5| = \frac{105}{15} = \frac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 5} = 7$$

$$|A_5 \cap A_7| = \frac{105}{35} = 3$$

los múltiplos de $5 \times 7 = 35$

$$|A_3 \cap A_7| = \frac{105}{21} = 5$$

los múltiplos de $7 \times 3 = 21$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 1$$

los multiplos de $105 = 3 \times 5 \times 7$

$$N(\bar{c}_3 \bar{c}_5 \bar{c}_7)$$

$$|(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c| = 105 - (35+21+15) + (7+3+5) - 1 =$$

$$|A_3| = N(c_3) \quad , \quad |X| = N$$

$$|A_5| = N(c_5)$$

$$|A_7| = N(c_7)$$

$$A_3^c = N(\bar{c}_3)$$

Cuantos enteros entre 1 y 9.999.999 cumplen que la suma de sus digitos es igual a 31.

$\underline{0}.\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{0}.\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{1}$ 7 cifras

$x_1 \; x_2 \; x_3 \; \dots \; x_7$

$0 \leq x_i \leq 9$

CANTIDAD DE SOLUCIONES DE:

$$\boxed{x_1 + \dots + x_7 = 31}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq x_i \leq 9 \\ x_i \in \mathbb{N}. \end{array}}$$

$3 \leq x_i$

Pensemos primero

$x_1 + \dots + x_7 = 31$ si $x_i \in \mathbb{N}$

$0 \leq x_i$

Analogia 7 estudiantes los quiero repartir

31 bizcochos

x_1 la cant. de bizcochos

x_7 " " " "

↪ Repartir 31 pelotas en 7 cajas (diferentes)
(iguales)

la cantidad CR_{31}^{7} de soluciones sin restricciones.

$X = \{(X_1 .. X_7) : X_i \in \mathbb{N},\ X_1 + \cdots + X_7 = 31\}$

quiero las soluciones con las 7 restricciones

$(x_1, \ldots, x_7)$

$\{x_1 + \cdots + x_7 = 31,\ \underbrace{0 \leq x_1 \leq 9\}}$ | $\overline{C_1}$ | $(A_1)^c$

$0 \leq x_2 \leq 9$ | $\overline{C_2}$ | $(A_2)^c$

$\vdots$

$0 \leq x_7 \leq 9$ | $\overline{C_7}$ | $(A_7)^c$

$\{(X_1 \ldots X_7)$ solución $/\ 10 \leq x_1\} = A_1$, C_1

$\{(X_1, .. X_7)$ solución $/\ 10 \leq x_2\} = A_2$ C_2

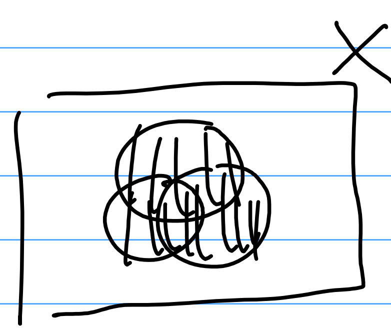
$\vdots$

$\{(X_1, \ldots, X_7)$ solución $/\ 10 \leq x_7\} = A_7$ C_7

$\overline{(A_1 \cup \cdots \cup A_7)}^{\,c}$

$\parallel$

$A_1^c \cap \cdots \cap A_7^c$



$$\sum_{i=0}^{n}$$

Soluciones sin restricciones

$$|(A_1 \cup \dots \cup A_7)^c| = |X| - |A_1 \cup \dots \cup A_7|$$

$$= \underbrace{CR_{31}^{7}} - |(A_1 \cup \dots \cup A_7)|$$

$$|(A_1 \cup \dots \cup A_7)| = |A_1| + \dots + |A_7|$$

$$- \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1,\dots,7\}}} |A_i \cap A_j| + \sum_{(i,j,k \in \{1,\dots,7\})} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$\dots \qquad + |A_1 \cap \dots \cap A_7|$$

$$= (CR_{21}^{7}) \cdot 7 - \binom{7}{2}(CR_{11}^{7}) + (CR_{1}^{7})\binom{7}{3}$$

$|A_1|$ $\{(x_1 \ldots x_7) \quad x_1 + \cdots + x_7 = 31$

$\underbrace{10 \leq x_1,}$ $x_2, \ldots x_7 \in \mathbb{N} \}$

es la cantidad de soluciones de $\rightarrow$ $x_1 + \cdots + x_7 = 21$

$x_i \in \mathbb{N}$

CR_{21}^{7}

¿$|A_2|$? $\quad |A_2| = CR_{21}^{7} \ldots \ldots |A_7| = CR_{21}^{7}$

$|A_1 \cap A_2|$ $\quad x_1 + \cdots + x_7 = 31$

$x_1 \geq 10$

y

$x_2 \geq 10$

es la cantidad de sols de $x_1 + \cdots + x_7 = 11$ $\quad x_i \in \mathbb{N}$

CR_{11}^{7}

7 conjuntos tomados de a 2

$$\binom{7}{2}$$

$x_1 + \dots + x_7 = 31$ $\quad$ $x_1 \geq 10$

$\downarrow$ $\quad$ $x_2 \geq 10$

$\quad$ $x_3 \geq 10$

$x_1 + \dots + x_7 = 1$

son 7 soluciones

$x_1 + \dots + x_7 = 31$ $\quad$ $x_1 \geq 10$

$x_i \in \mathbb{N}$ $\quad$ $x_2 \geq 10$

$\quad$ $x_3 \geq 10$

hay 0 soluciones $\quad$ $x_4 \geq 10$

si intersecto 4 condiciones

a partir de acá las intersecciones son vacías.