$$A \qquad\qquad B$$

Ejercicio 13: $f: \{1, 2, \ldots m\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots n\}$

(a) $f: A \to B$ sin restricciones

$f: \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$

Obs: f queda determinada por $f(1), \ldots, f(m)$

$f(1) = 5$
$f(2) =$

T_1	Elegir	$f(1)$	n
T_2	Elegir	$f(2)$	n
$\vdots$			
T_m	elegir	$f(m)$	n

Como $T_1 \ldots T_m$ son independientes entonces

(por regla del producto) la cantidad de maneras de hacer las

m tareas $T_1 \ldots T_m$ son:

$$\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m \text{ veces}} = n^m.$$

(d) f es estrictamente monotona creciente

$f:\{1,\dots m\}\longrightarrow\{1,\dots,n\}$

Son lo mismo

$f(1)<f(2)<f(3)<\dots<f(m)$

$\boxed{i<j\Rightarrow f(i)<f(j)}$

$f:\{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3,4,5,6\}$

$Im(f)=\{f(x):\ x\in\{1,2,3\}\}$

$=\{f(1),f(2),f(3)\}$

Si fuera: $f(1)=5$ $\quad f(2)\in\{2,3\}$

¿ $f(1)=3$? $\quad f(2)=5$ $\quad$ no puede ser $f(3)=2$

Si $Im(f)$ $\Rightarrow$ Necesariamente:

$\overset{\shortparallel}{\{2,3,5\}}$ $\quad f(1)=2$ $\quad f(3)=5$ $\quad$ f queda determinada por la imagen.

$f(2)=3$

Si f es estrictamente creciente:

$f(1), \overbrace{f(2), \underbrace{f(3)}}$

$Im(f) = \{\cancel{2}, 3, 5\}$

$f(1) \quad f(2) \quad f(3)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\{2, 3, 5\}$

$f(1), \ldots, f(m)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$

ordenados

$$f:\{1,2,3\}\to\{1,2\}$$

Si $f:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}$ es estrictamente creciente $\Rightarrow n\geq m$

CASO 1 $n<m \Rightarrow$ hay 0 funciones estrictamente crecientes.

caso 2 $n\geq m$.

$f:\{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,n\}$ estrictamente creciente queda determinada por elegir la $im(f)$.

¿De cuantos maneras puedo elegir $im(f)$?

elegir $\underline{m}$ elementos de $\underline{n}$.

$$\binom{n}{m} = C^n_m = \frac{n!}{(m-n)!\,m!}$$

(e) $f : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots n\}$

monotona crescente, significa:

$f(1) \leq f(2) \dots \leq f(m)$

$\left[\quad i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j) \right]$

$1, 2 \qquad\qquad f(1) = f(2)$

$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 4 \end{array} \quad o \quad \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 4 \end{array} \qquad \{2, 4\}$

$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$

$(2, 2, 4) \qquad\qquad (2, 4, 4)$

$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad (2, 2, 2)$

$f(3, 3, 6, 2, 1)$ $f(1)$ $f(4)$

$f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{1, 2, 3, 3, 6\} \to (1, 2, 3, 3, 6)$

$\updownarrow$

$f(1) = 1 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = 3$

$f(5) = 6$

Contar la cantidad de maneras de elegir m elementos con repetición entre n elementos:

CR^{n}_{m}

tenemos CR^{n}_{m} de funciones monótonas crecientes $f: \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$

$$\underline{5 \leq 5}$$

$5 < 6 \qquad \underline{5 \leq 6}$

$f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$

$f(1) = 1$ es monotona creciente
$f(2) = 2$ estricta
$f(3) = 3$

$\overset{1}{f(1)} < \overset{2}{f(2)} < \overset{3}{f(3)}$ ✓

$f(1) \leq \underbrace{f(2) \leq f(3)}$ ✓ $=$ o $<$

y también es monotona creciente.

Hallar la cantidad de palabras que pueden formarse usando las letras de la palabra ALGORITMO

RITMOALGO , MALOGRITO

GRITMOLAO ,

9 elementos , ¿$P_9 = 9!$?

__ __ __ __

hay 2 O , no arranco con 9 opciones

$\Rightarrow$ no son permutaciones de 9.

Si O_1 y O_2 son diferentes tengo $P_9 = 9!$

$$9! \begin{cases} GRITMO_1LAO_2 \quad RITMO_1ALGO_2 \quad \ldots \\ GRITMO_2LAO_1 \quad RITMO_2ALGO_1 \quad \ldots \end{cases}$$

Pero cada una se repite dos veces:

$$\frac{9!}{2} \qquad O_1 \vee O_2 \text{ son la misma}$$

RITMOAGOLO 10 letras

3 repetidas

$RITM\overbrace{O}_{1}ALG\overbrace{O}_{2}L\overbrace{O}_{3}$ $ALGO_1RITMO_2O_3$

3! palabras repetidas

$RITM\ \underline{O_2}\ G\ \underline{O_3}\ L\ \underline{O_1}$

RITM

son

si O_1, O_2, O_3 $P_{10} = 10!$ palabras

son diferentes

Si $O_1 \vee O_2 \vee O_3$ tengo

$$\frac{P_{10}}{(3)!}$$

Si se repite 2 veces A
3 veces O

6 letras

$$\frac{P_6}{3!\,2!}$$

$\overbrace{AAAOOR}^{6}$

$$\frac{P(6)}{3!\,2!}$$

Ejercicio 12

sumando iguales

elecciones de paréntesis diferentes.

$$(x_1+x_2)^2 = (x_1+x_2)(x_1+x_2)$$

$$= x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2.$$

elegir un elemento del primer () y otro del segundo ()

$$= 1x_1^2 + 2x_1^1x_2^1 + 1x_2^2 = x_1^2x_2^0 + 2x_1^1x_2^1 + x_1^0x_2^2$$

Determinar el coeficiente que multiplica

a $\underline{x_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n}}$, $r_1+\ldots+r_n=n$

$$(x_1+\ldots+x_r)(x_1+\ldots+x_r)\ldots(x_1+\ldots+x_r)$$

$$\|$$

$$(x_1+\ldots+x_r)^n$$

cada sumando de

$$(x_1+\dots+x_r)(x_1+\dots+x_r)\dots(x_1+\dots+x_r)$$

consiste en elegir un x_i en cada paréntesis

$$\underbrace{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}}\quad (n_1+n_2+\dots+n_r) = n$$

$$\underbrace{\underbrace{x_1^{n-1}}\cdot x_2^{1}\,x_3^{0}\dots x_r^{0}}$$

$$(x_1+\dots+x_r)(x_1+\dots+x_r)\dots(x_1+x_2\dots)$$

$$(x_1+x_2\quad)(x_1+\quad+x_r)\quad(x_1+\dots)$$

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_r^{n_r}$$

la cantidad de veces que elegí x_1

los veces que elegí x_2

Ejemplo anterior

$$\begin{matrix} \overset{\downarrow}{x_1}\ \overset{\downarrow}{x_1} \cdots x_1\ \overset{\downarrow}{x_2} \\ x_2\ x_1 \cdots\cdots x_1 \\ x_1\ x_2\ x_1 \cdots x_1 \end{matrix} \longleftrightarrow$$ elecciones diferentes de paréntesis

$$x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

quiero contar todas las palabras formadas

por n_1 x_1's $\quad n_1 + \ldots + n_r = n$

$+$

n_2 x_2's

$+ \vdots$

$+$

n_r x_r's

Quiero contar palabras de largo n

con las siguientes letras x_1: n_1 veces

$\vdots$

x_r: n_r veces

la cantidad de palabras que se pueden formar es:

$$\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!\ldots(n_r)!} = PR^{n}_{(n_1, n_2, \ldots, n_r)}$$

Caso particular: $n_1 = (n-1)$ $\quad n_3 = 0 \ldots n_r = 0$

$n_2 = (1)$

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$$

$n_1 = n-1 \quad n_3 = 0 \ldots n_r = 0$

$n_2 = 1$

$$x_1^{n-1} x_2^{1} \quad \frac{n!}{(n-1)!\,1!\,0!\ldots0!} =$$

$$\shortparallel$$

n

$$\frac{n.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

n es el coef que multiplica a $x_1^{n-1} x_2^{1}$

$$r=2 \quad (x_1+x_2)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_1^{i} x_2^{n-i}$$

(E) $(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum\limits_{(n_1 + \dots + n_r = n)} PR^n_{(n_1 \dots n_r)} \cdot x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$

los sumandos son tantos como $(n_1 \dots n_r)$ tales que

$n_1 + \dots + n_r = n$

Sumar todos los elementos de la forma $PR^n_{(n_1, \dots n_r)} \, x_1^{n_1} \dots x_r^{n_n}$

que cumplan que $n_1 + \dots + n_r = n$

Ejemplo $\boxed{\begin{array}{c} n = 4 \\ r = 3 \end{array}}$

$4 + 0 + 0 \quad (n_1, n_2, n_3) = (4, 0, 0)$

$3 + 1 + 0 \quad (n_1, n_2, n_3) = (3, 1, 0)$

$\vdots$

si $r=2$ como queda?

(E)