

Ej 2 (continuación)

caso (2)

$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ $\overbrace{P_6 \dots P_{10}}^{2 \text{ preguntas.}}$

T_1 exactamente 4 de los
5 primeros

$$\underline{T_1} \quad \binom{5}{4}$$

$$\rightsquigarrow \binom{5}{4} \times \binom{5}{2}$$

$$\underline{T_2} \quad \binom{5}{2}$$

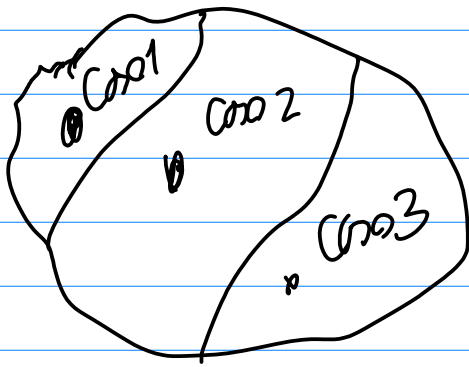
cantidad de maneras
de elegir 6 preguntas
en el caso (2)

caso (3) Elegir exactamente 5 preguntas
de los primeros 5.

$$T_1 \quad \downarrow$$

$$T_2 \quad \binom{5}{1} = 5$$

$$5 \times 1$$



$$\boxed{\binom{n}{m} := \frac{n!}{(n-m)! m!}}$$

La cantidad de maneras de elegir 6
preguntas con 3 entre los primeros 5 queda:

$$\binom{5}{3} \times \binom{5}{3} + \binom{5}{4} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{5} \times \binom{5}{1}$$

$$= \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} + \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} + \dots$$

Combinaciones con repetición

Si quiero elegir n elementos de r clases diferentes, con repetición, entonces tengo

CR_n^r maneras de hacer la elección

$$CR_n^r = \binom{\underbrace{n+r-1}_{r-1}}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

Ejemplo:

Bar, 6 bebidas
↓

(A)(C)(F)(V)

AACFFF, AAACCC

¿Cuántos pedidos diferentes de 6 bebidas hay?

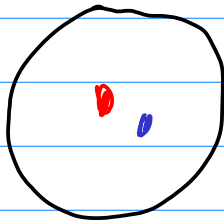
$$CR_6^4 = \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

Ejercicio 4

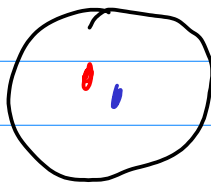
- $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ bizcochos de chocolate
- $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ " de crema

3 Est

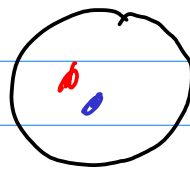
T_1



1



2

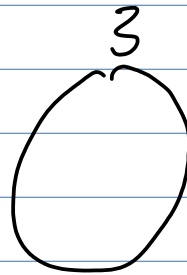
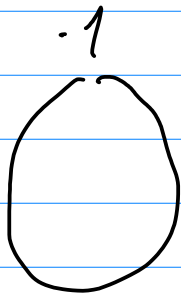


3

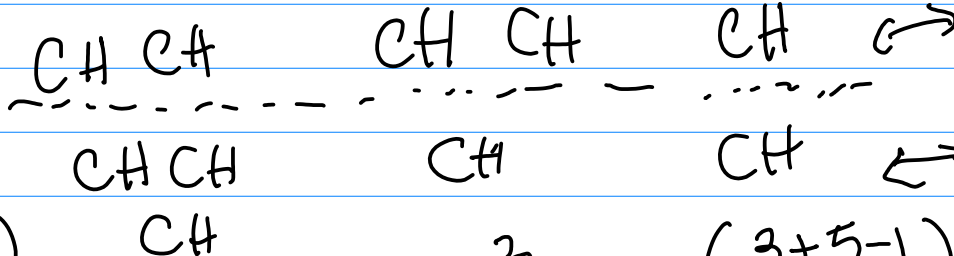
1 sola manera de hacerla

T_2

5 de chocolate.



Elección de estudiantes con repetición

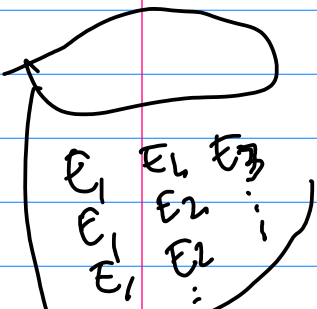


E_1, E_2, E_3
 E_2, E_2, E_3

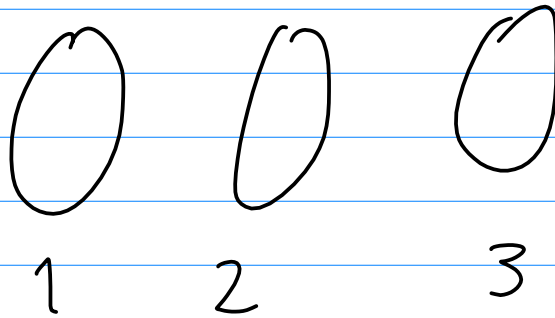
E_1, E_1, E_1

E_2, E_3

$$T_2: CR^3_5 = \begin{pmatrix} 3+5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$



T_3 Repartir los 4 de crema



hay CR_4^3 maneras de repartirlos

Como los tareas son independientes

$$\Rightarrow 1 \times CR_5^3 \times CR_4^3.$$

↓
por regla
del producto

$$= \binom{3+5-1}{3-1} \times \binom{3+4-1}{3-1}$$

$$= \binom{7}{2} \times \binom{6}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 4 \quad (E)$$

$\hookrightarrow$ soluciones naturales.

$$S = \{ (x_1, x_2, \dots, x_7) : x_i \in \mathbb{N} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 4 \}$$

$(1, 1, 1, 0, \dots, 0, 1)$ es una solución natural de (E)

Elección de $\underline{x_1 \dots x_7}$?

$$(1, 1, 1, 0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow x_1 x_2 x_3 x_7$$

$$(1, 2, 1, 0, \dots, 0) \leftrightarrow x_1 x_2 x_2 x_3$$

$$(0, \dots, 0, 4) \leftrightarrow x_7 x_7 x_7 x_7$$

elegir 4 elementos $\rightsquigarrow CR_4^7$
de 7 clases (con repetición)

entonces La cantidad de soluciones naturales de

queda
$$\underbrace{x_1 + \dots + x_7 = 4}$$

$$CR_4^7 = \binom{7+4-1}{7-1} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{(10-6)! 6!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{4! \cdot \cancel{(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad (E2)$

(A) $\begin{pmatrix} \underline{x_1 \geq 1} & x_3 \geq 3 \\ x_2 \geq 1 & x_4 \geq 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \geq 2 & x_3 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 & x_4 \geq 3 \end{pmatrix}$

al menos
2 bizcochos

Soluciones de (E2) sin considerar (A)

$$CR_{15}^4$$

T1

$x_1, \dots, x_4$ son 4 estudiante y tenemos 15 bizcochos. a repartir

Para que se cumpla (A)



$$(x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) + (x_4 - 3) = 15 \quad \underline{-2 \quad -2 \quad -3 \quad -3} = 5 \quad (E3)$$

Me quedan 5 por repartir, es lo mismo que solucionar:

$$T_2: \quad \underline{y_1} + y_2 + y_3 + y_4 = 5 \quad \hookrightarrow \quad CR_5^4$$

$$y_1 = x_1 - 2 \geq 0$$

$$y_2 = x_2 - 2 \geq 0$$

$$y_3 = x_3 - 3 \geq 0$$

$$y_4 = x_4 - 3 \geq 0$$

Soluciones naturales

Entonces tenemos CR_5^4 soluciones naturales de

$$x_1 + \dots + x_4 = 15$$

con $x_1 \geq 1$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 3$$

$$x_4 \geq 3$$

conjuntos no consideran el orde de los elementos
 $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$

Ejercicio 10: $A = \{1, \dots, n\}$

y quiero contar la cantidad de
 subconjuntos de A .

$\{2, 1\} = \{1, 2\} \subseteq A \rightarrow$ elegir $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \text{VA} & \text{VA} & \text{NO} & \dots \end{matrix}$
 $\{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\} \subseteq A \quad \dots \quad n$
 NO

$$\{n\} \subseteq A$$

$$\{1\} \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

$$\{1, 2\} \leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \text{VA} & \text{VA} & \text{NO} & \dots & \sim \text{NO} \end{matrix}$$

$$\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \text{VA} & \text{VA} & \text{VA} & \text{NO} & \dots \text{NO} \end{matrix}$$

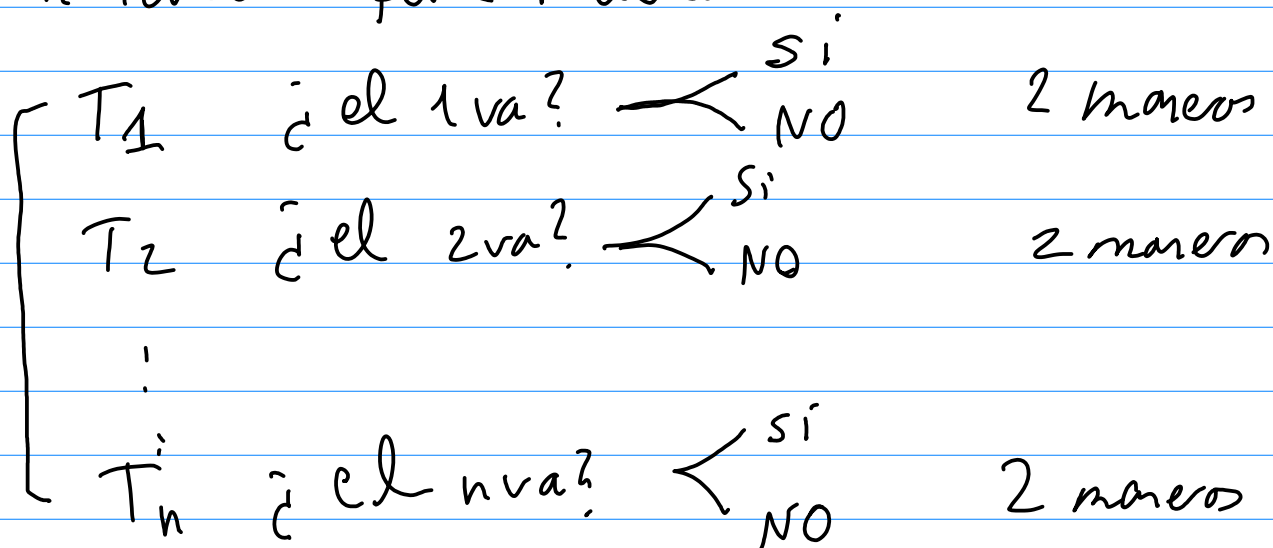
$$\{n\} \leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \text{NO} & \text{NO} & \text{NO} & \dots & \text{VA} \end{matrix}$$

$$\emptyset \leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \text{NO} & \text{NO} & \text{NO} & \dots & \text{NO} \end{matrix}$$

¿. Como Dividirlo en sub tareas?

n tareas para realizar

son indep.



la cantidad de maneras de realizar

T que se divide en $T_1, \dots, T_n$

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ veces}} = 2^n$$

2 maneras de realizar

$$A = \{1, 2\}$$

↓ ↓

$$\{1, 2\} \leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 \\ \text{Si} & \text{Si} \end{matrix}$$

$$\{1\} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{Si} & \text{NO} \end{matrix}$$

$$2^2 = 4$$

$$\{2\} \leftrightarrow \begin{matrix} \text{NO} & \text{Si} \end{matrix}$$

$$\emptyset \leftrightarrow \begin{matrix} \text{NO} & \text{NO} \end{matrix}$$

5 a) ¿cuantos resultados diferentes se pueden obtener al tirar 3 dados idénticos?

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow [6, 6, 6] \\ 6 & 6 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} [1, 2, 3] \\ [1, 3, 1] = [1, 1, 3] \end{array}$$

Elegir 3 resultados entre 1 y 6
que se pueden repetir.

$$\cancel{CR_3} \quad CR_3^6$$