Inducción Completa:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots\}$$

Principio de inducción completa

Sirve para demostrar afirmaciones sobre los naturales.

Una dem por inducción completa no es una cuenta.

Para que sea una demostración tiene que aparecer la estructura del razonamiento por inducción completa.

Ejemplo

P_n: n se puede escribir como producto de primos $(\forall n \geq 2)$.

Ejemplo $6 = 3.2$.

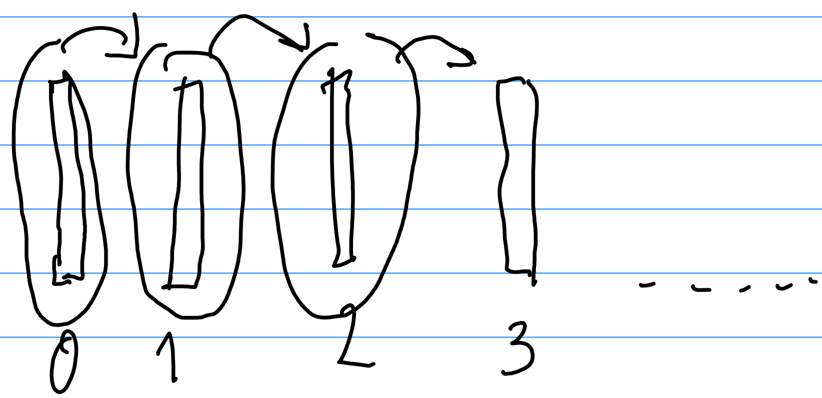
— o —

Principio de inducción completa

Si queremos probar una afirmación P_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alcanza con probar dos cosas:

1. P_0 se cumple (y su dem)
2. si P_n se cumple $\Rightarrow$ P_{n+1} se cumple (y su dem) $\forall n \in \mathbb{N}$



P_0

Principio de inducción completa

① Paso base   se cumple P_0 (se demuestra)

② Paso inductivo: (H) Se cumple P_n (se demuestra)

(T) Se cumple P_{n+1} $\forall n \in \mathbb{N}$

hipótesis

tesis

Ejercicio 1 (Pr. 1)

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0 + 1 + \ldots + n$$

$0, 1, 2, \ldots n$

$$\boxed{P_n : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

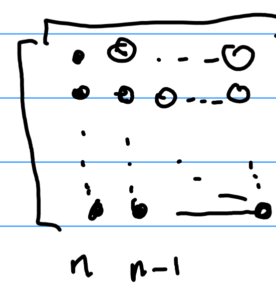
$$P_n : 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{r l} & 0+1+2+\cdots+k \\ + & k+(k-1)+\cdots+0 \\ \hline & k+k+\cdots+k \end{array}$$

$$\begin{array}{r l} & 0+1+2+\cdots+100 \\ + & 100+99+98+\cdots+0 \\ \hline & \underbrace{100+100+100+\cdots+100}_{=100(101)} \end{array}$$

$$2(0+1+\cdots+100) = 100(101)$$



$$\begin{array}{r l} & 0+1+2+\cdots+k \\ + & k+(k-1)+\cdots+0 \\ \hline & k+k+k+\cdots+k = (k+1)\cdot k \end{array}$$

$$2(0+1+\cdots+k) = (k+1)k$$

$$(0+1+\cdots+k) = \frac{(k+1)k}{2}$$

Probemoslo por inducción completa

<u>Paso base</u>: $P_0 : 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

<u>dem</u>: $0 = 0 \cdot \frac{(0+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2}$

porque cualquier cosa por cero de cero.

<u>Paso inductivo</u>: (HI) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \nearrow P_n$

(T) $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

<u>dem</u>: separamos el último término

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

POR Hipotesis inductiva

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

entonces demostramos que:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ya que demostramos el paso base y el paso inductivo usando el principio de inducción completa deducimos que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$k \in \mathbb{N}$ es multiplo de 5 si $\exists q \in \mathbb{N}$ / $k = 5 \cdot q$

Ejercicio 2 :

Probar que $\underbrace{7^n - 2^n}_{P_n}$ es múltiplo de 5 $\forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

Probemoslo por inducción completa:

Paso base: P_0 : $7^0 - 2^0$ es múltiplo de 5.

dem: $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$

Paso inductivo: (H) $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5.

$5 \cdot (7^n - 2^n)$ (T) $7^{n+1} - 2^{n+1}$ es multiplo de 5.

dem:

$$7^{n+1} - 2^{n+1} = 7^n \cdot 7^1 - 2^n \cdot 2$$

$$= 7^n \cdot (5+2) - 2^n \cdot 2 = \star$$

$= 7^n 5 + 7^n.2 - 2^n.2 = 7^n.5 + (7^n - 2^n)2$

$= 7^n.5 + (5q).2 = 5\underbrace{(2q + 7^n)}_{q'} = 5q'$

por hipótesis inductiva

$7^n - 2^n$

$\shortparallel$

$5.q$

$\Rightarrow$ Hemos demostrado por inducción completa que

$7^n - 2^n$ es multiplo de 5 $\forall n \in \mathbb{N}$

$7^n.7 - 2^n.2$

$\underline{a^n.a^m = a^{n+m}}$

$a^n + b^n \neq (a+b)^n$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

$a^n + a^n = 2a^n$