

Agosto 2020

Ejercicio 2

Para n natural sea a_n la cantidad de formas de pagar n pesos con monedas de 1 y de 2 pesos.

hallar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$a_n : \left\{ \begin{array}{ll} C_1 + 2C_2 = n \\ C_1, C_2 \text{ monedas de 1 y de 2} \\ C_1 \geq 0 \\ C_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

a_n es la cantidad de soluciones de (1)

$$(1 + x + x^2 + \dots) (1 + x + x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

cuantos soluciones $x^i \cdot x^j = x^n$ $a_n \cdot x^n$
hay de

$$x^i \cdot x^j = x^n$$

$$\boxed{i + j = n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(1 + x + x^2 + \dots \right) \left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots \right)$$

$i b_n?$

es la cantidad
de soluciones
de

$$x^i x^j = x^n$$

$i \geq 0$
 $j \geq 0$
 $j = 2$

b_n es la cantidad
de soluciones
de

$$i + j = n \quad \begin{matrix} i \geq 0 \\ j \geq 0 \\ j = 2 \end{matrix} \quad (2)$$

$$\Rightarrow b_n = a_n$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$\underbrace{1 + y + y^2 + y^3 + \dots}_{y = x^2} = \frac{1}{1-y}$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1+x)}$$

$$A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2 = 1$$

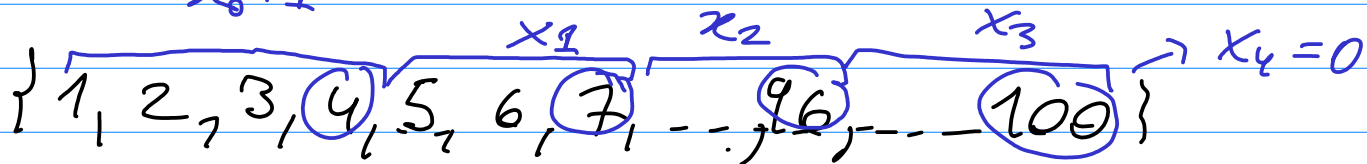
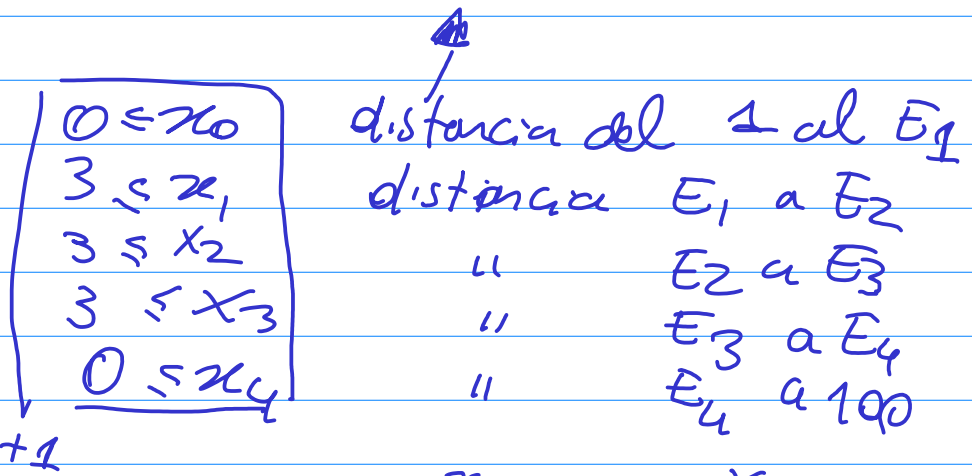
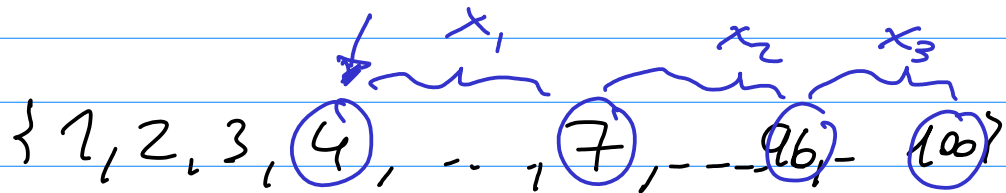
$$-Ax^2 + A + B + Bx + C(x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\underbrace{(C-A)}_0 x^2 + \underbrace{(B-2C)}_0 x + \underbrace{A+B+C-1}_0 = 0$$

$$\begin{cases} C-A=0 \\ B-2C=0 \\ A+B+C-1=0 \end{cases}$$

Mayo 2022

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ tal que la distancia entre cada par de elementos sea de 3 o más.



$$x_0 + 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 99$$

$$y_1 = x_1 - 3$$

$$y_1 \geq x_1 - 3 \geq 0$$

$$y_2 = x_2 - 3$$

$$y_0 = x_0$$

$$y_3 = x_3 - 3$$

$$y_4 = x_4$$

$$y_0 + (y_1 + 3) + (y_2 + 3) + (y_3 + 3) + y_4 = 99$$

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 90 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

$$CR_{90}^5 = \begin{pmatrix} 90+4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\{ \underbrace{1, 2}_{x_0+1}, \underbrace{3}_{E_1}, \dots, \underbrace{7}_{E_2}, \dots, \underbrace{41}_{E_3}, \dots, \underbrace{25}_{E_4}, \dots, 100 \}_{x_4}$$

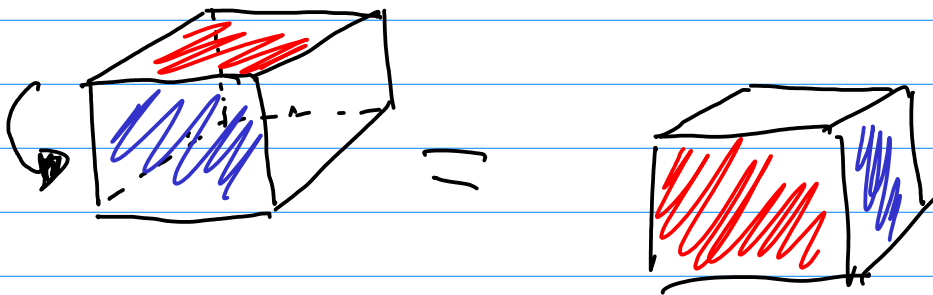
$$d(1, E_1) + 1$$

$$d(E_4, 100)$$

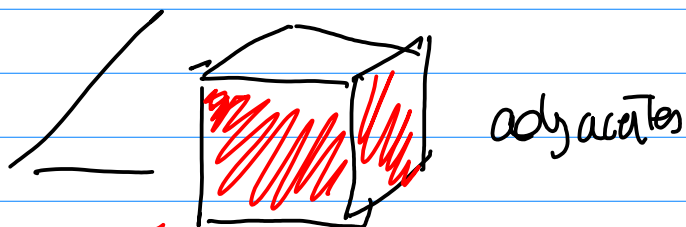
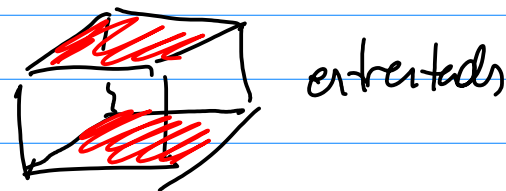
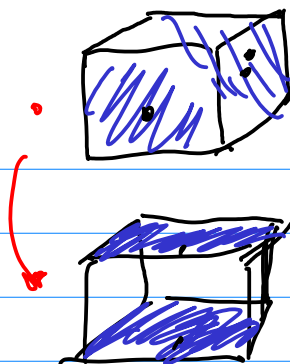
$$CR_n^r = \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Septiembre 2018

M03 De cuántas maneras distinguibles se pueden pintar dos caras de un cubo



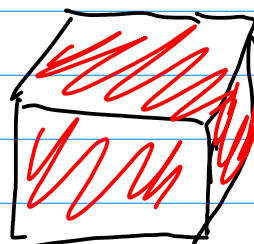
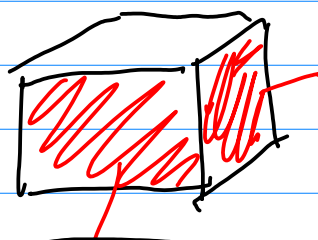
2⁶ maneras si las caras estuvieran numeradas



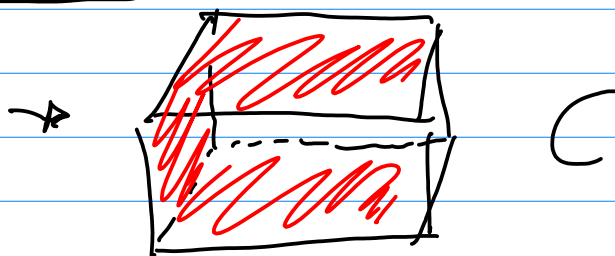
+

0	caras de rojo	1
1	cara de rojo	1
2	caras de rojo	2
3	caras de rojo	2
4	caras de rojo	2
5	caras de rojo	1
6	" " "	1

(2 caras de azul)



10

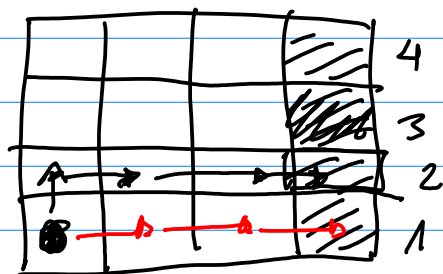


10 maneras de pintar el cubo.

10 palomares $\Rightarrow$ alcanza con 11

niños para asegurar 2 cubos pintados igual

M01



maneras de llegar a cada lugar

N_1

N_2

N_3

N_4

N_1 : De cuantas maneras puede llegar al lugar 1
DDD 1 sola manera.

N_2 : De cuantas " " " el lugar 2

uno arriba
tres a la derecha

A, D, D, D

ADDD ..

DADD ..

$$4 \text{ letras}, 4 = \frac{4!}{3!1!} = P_m^n$$

N_3 : De cuantas mane pue llegar al lugar 3.

$\begin{array}{c} A, A \\ \hline D, D, D \end{array}$

→

ejemplo
ADADD

$$P_{3,2}^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{10}$$

N_4 :

$\begin{array}{c} A, A, A \\ \hline D, D, D \end{array}$

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = \underline{20}$$

$$1 + 4 + 10 + 20 = 35$$

Mayo 2022

Mo 6

¿De cuantas formas podemos extraer 9
cánicos de una bolsa que
contiene 16 cánicos

$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ rojos} \\ 4 \text{ azules} \\ 4 \text{ negros} \\ 4 \text{ blancos} \end{array} \right\} ?$

x_B, x_R, x_A, x_N

9 cánicos

$$x_B + x_R + x_A + x_N = 9$$

$$x_B \geq 0$$

$$x_R \geq 0$$

$$x_A \geq 0$$

$$x_N \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \times 1 \end{pmatrix} CR_9^4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_B + x_R + x_A + x_N = 9$$

$$0 \leq x_B \leq 4$$

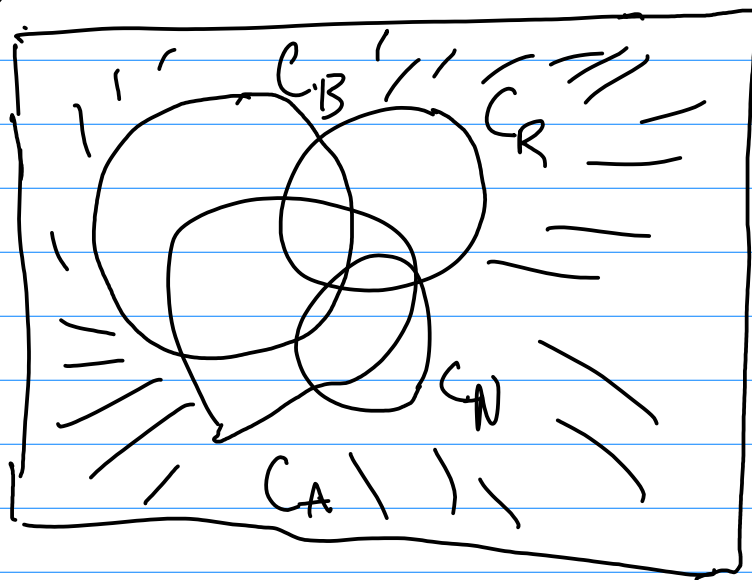
$$0 \leq x_R \leq 4$$

$$0 \leq x_A \leq 4$$

$$0 \leq x_N \leq 4$$

$$X \rightarrow \{(x_B, x_R, x_A, x_N) : x_B + x_R + x_A + x_N = 9\}$$

$$x_i \geq 0$$



$$C_A = \{(x_B, x_R, x_A, x_N) : x_B + x_R + x_A + x_N = 9\}$$

$$x_A \geq 5 \quad x_i \geq 0$$

$$|X - (C_A \cup C_B \cup C_R \cup C_N)|$$

$$= |X| - |C_A \cup C_B \cup C_R \cup C_N|$$

$$\textcircled{1} |C_A \cup C_B \cup C_R \cup C_N| \textcircled{1}$$

$$= |C_A| + |C_B| + |C_N| + |C_R|$$

$$- \sum |C_i \cap C_j|$$

$$+ \sum |C_i \cap C_j \cap C_k| - |C_A \cap C_B \cap C_N \cap C_R|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A + x_B + x_R + x_N = 9 \\ x_A \geq 5 \quad x_i \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(x_A - 5) + x_B + x_R + x_N = 4$$

$$y_A \geq 0$$

$$CR_4^4$$

$$|C_A| = CR_4^4$$

$$|C_B| =$$

$$|C_R| = |C_N|$$

$$|C_A \cup C_B \cup C_R \cup C_N| =$$

$$4 \cdot CR_4^4 - \dots$$

$$\therefore |C_B \cap C_R|?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B + x_R + x_A + x_N = 9 \\ x_B \geq 5 \quad x_i \geq 0 \\ x_R \geq 5 \end{array} \right.$$

$$|C_B \cap C_R| = 0 \text{ and } |C_B \cap C_R \cap C_N| = 0$$

$$\text{y } |C_B \cap C_R \cap C_N \cap C_A| = 0$$

$$|X - \overline{(C_A \cup C_B \cup C_R \cup C_N)}|$$

$$= CR_9^4 - 4CR_4^4$$

$$\frac{\overline{Sub(\textcircled{m}, \textcircled{n})}}{n!} = S(m, n)$$

$Sub(m, n)$

cajas distintas
elem distintos
uso todas las
cajas

$S(m, n)$

cajas iguales
elementos distintos
uso todas las
cajas.