

Múltiple Opción 1

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $x_3 \geq 5$.

Sugerencia: aplicar cambios de variables adecuados para que todas las variables sean enteras y no negativas.

(A) 41;

(B) 51;

(C) 61;

(D) 71;

(E) 81.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \quad \text{con} \quad \begin{aligned} -2 &\leq x_1 \leq 6 \\ -2 &\leq x_2 \leq 6 \\ 5 &\leq x_3 \end{aligned}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 6 \quad \leadsto \quad 0 \leq \underbrace{x_1 + 2}_{y_1} \leq 8$$

$$-2 \leq x_2 \leq 6 \quad \leadsto \quad 0 \leq \underbrace{x_2 + 2}_{y_2} \leq 8$$

$$5 \leq x_3 \quad \leadsto \quad 0 \leq \underbrace{x_3 - 5}_{y_3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

$$\underbrace{(x_1 + 2)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 + 2)}_{y_2} + \underbrace{(x_3 - 5)}_{y_3} = 17 + 2 + 2 - 5 = 16$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \quad \text{con} \quad \begin{aligned} 0 &\leq y_1 \leq 8 \\ 0 &\leq y_2 \leq 8 \\ 0 &\leq y_3 \end{aligned}$$

$$u = \{ \text{soluciones de } y_1 + y_2 + y_3 = 16 \text{ con } 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \}$$

$$c_1 = \text{soluciones con } y_1 > 8 \quad (y_1 \geq 9)$$

$C_2 =$ soluciones con $y_2 \geq 8$ ($y_2 \geq 9$)

$$|U| = CR_{16}^3$$

$N(C_1) =$ cantidad de soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 = 16$ con $9 \leq y_1$
 $0 \leq y_2$
 $0 \leq y_3$

$$N(C_1) = CR_7^3$$

$$N(C_2) = CR_7^3$$

$N(C_1 C_2) =$ cantidad de soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 = 16$ con $9 \leq y_1$
 $9 \leq y_2$
 $0 \leq y_3$

$$N(C_1 C_2) = 0$$

$$N(\bar{C}_1 \bar{C}_2) = |U| - N(C_1) - N(C_2) + N(C_1 C_2)$$

$$= CR_{16}^3 - 2CR_7^3$$

$$= C_{16}^{18} - 2C_7^9$$

$$= \frac{18!}{16! 2!} - 2 \frac{9!}{7! 2!}$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!} \cdot 2} - 2 \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2}$$

$$= 9 \cdot 17 - 9 \cdot 8$$

$$= 9(17-8)$$

$$= 9 \cdot 9$$

$$= 81$$

Múltiple Opción 4

Sea a_n la cantidad de maneras de reunir n pesos uruguayos con monedas de 1 peso y de 5 pesos. Entonces, la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es:

(A) $a(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1+x^5}$;

(B) $a(x) = \frac{1}{1+x} \frac{1}{1-x^5}$;

(C) $a(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^5}$;

(D) $a(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1+x^5}$;

(E) $a(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1+5x}$.

$a_n^{(1)}$ = cantidad de maneras de reunir n pesos con monedas de 1 peso

$$a_0^{(1)} = 1$$

$$a_1^{(1)} = 1$$

$$a_2^{(1)} = 1$$

$$a_n^{(1)} = 1$$

función generatriz de $a_n^{(1)}$:

$$f^{(1)}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$a_n^{(5)}$ = cantidad de maneras de reunir n pesos con monedas de 5 pesos

$$a_0^{(5)} = 1$$

$$a_1^{(5)} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_4^{(5)} = 0$$

$$a_5^{(5)} = 1$$

$$a_n^{(5)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 5 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

función generatriz de $a_n^{(5)}$ es:

$$f^{(5)}(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots$$

$$\underbrace{(\textcircled{0} \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \textcircled{5} \ \dots)}_{\text{monedas de 1 peso}} \cdot \underbrace{(\textcircled{0} \ \textcircled{5} \ 10 \ \dots)}_{\text{monedas de 5 pesos}}$$

$$(\textcircled{1} + x + x^2 + x^3 + x^4 + \textcircled{x^5} + \dots) (\textcircled{1} + \textcircled{x^5} + x^{10} + \dots)$$

a_n es el coeficiente de x^n en este producto

$\Rightarrow$ la función generatriz de a_n es

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots) (1+x^5+x^{10}+\dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5}$$

$$1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots = 1+x^5+(x^5)^2+(x^5)^3+\dots$$

$$y=x^5 \rightarrow = 1+y+y^2+y^3+\dots$$

$$= \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-x^5}$$

Ejercicio de Desarrollo

Probar que si $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$, entonces $a_n \geq 3^n$ para todo $n \geq 1$.

Vamos a probar que $a_n \geq 3^n$ para todo $n \geq 1$ por el principio de inducción fuerte.

Caso base: vamos a considerar 3 casos base

$$\ast a_1 = 3 \geq 3^1 \quad \checkmark$$

$$\ast a_2 = 10 \geq 3^2 = 9 \quad \checkmark$$

$$\ast a_3 = 30 \geq 3^3 = 27 \quad \checkmark$$

Paso inductivo:

Hipótesis inductiva: Suponemos que:

$$a_n \geq 3^n$$

$$a_{n+1} \geq 3^{n+1}$$

$$a_{n+2} \geq 3^{n+2}$$

para algún $n \geq 1$

Tesis inductiva: Queremos probar que $a_{n+3} \geq 3^{n+3}$

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$$

$$\geq \underbrace{2 \cdot 3^{n+2}}_{3^2 \cdot 3^n} + 7 \cdot \underbrace{3^{n+1}}_{3 \cdot 3^n} + 3^n$$

por la hipótesis inductiva

$$= 3^n (2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 1)$$

$$= 3^n (18 + 21 + 1)$$

$$= \underline{3^n \cdot 40}$$

$$\geq 3^n \cdot 27$$

$$= 3^{n+3}$$

$$3^{n+3} = 3^n \cdot \overset{27}{\overbrace{3^3}} = 3^n \cdot 27$$

Entonces $a_{n+3} \geq 3^{n+3}$

otra forma de probar la tesis:

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$$

$$\geq 2 \cdot 3^{n+2} + 7 \cdot 3^{n+1} + 3^n \geq 3^{n+3}$$

$$2 \cdot \underbrace{3^{n+2}}_{3^n \cdot 3^2} + 7 \cdot \underbrace{3^{n+1}}_{3^n \cdot 3} + 3^n \stackrel{?}{\geq} \underbrace{3^{n+3}}_{3^n \cdot 3^3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 1 \stackrel{?}{\geq} 3^3$$

$$40 \geq 27 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \text{Entonces } a_{n+3} \geq 2 \cdot 3^{n+2} + 7 \cdot 3^{n+1} + 3^n \geq 3^{n+3}$$

Hipótesis inductiva: Suponemos que

$$a_n \geq 3^n$$

$$a_{n-1} \geq 3^{n-1}$$

$$a_{n-2} \geq 3^{n-2}$$

para algún $n \geq 3$

Tesis inductiva: Queremos probar que $a_{n+1} \geq 3^{n+1}$

$$a_{n+1} = 2a_n + 7a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$\geq 2 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-2}$$

por hipótesis inductiva

$$2 \cdot \underbrace{3^n}_{3^{n-2} \cdot 3^2} + 7 \cdot \underbrace{3^{n-1}}_{3^{n-2} \cdot 3} + 3^{n-2} \stackrel{?}{\geq} \underbrace{3^{n+1}}_{3^{n-2} \cdot 3^3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 1 \stackrel{?}{\geq} 3^3$$

$$\Leftrightarrow 40 \geq 27 \quad \checkmark$$

$$\text{Entonces } a_{n+1} \geq 2 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-2} \geq 3^{n+1}$$

Múltiple Opción 5

Determinar el coeficiente en xy^3 de la expresión $(x - y + y^3 + 2)^5$.

- (A) 20;
(B) 40;
(C) 80;
(D) 120;
(E) 200.

$$(x - y + y^3 + 2)(x - y + y^3 + 2)(x - y + y^3 + 2)(x - y + y^3 + 2)(x - y + y^3 + 2)$$

$x \qquad y^3 \qquad 2 \qquad 2 \qquad 2$

* elegir x una vez, y^3 una vez, 2 tres veces:

$$\frac{5!}{1!1!3!} x^1 (-y)^0 (y^3)^1 2^3$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ y^3 \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot 2 \end{array} \right\}$$

cantidad de palabras con una x , un y^3 y tres 2

$$\frac{5!}{1!1!3!}$$

* elegir x una vez, $(-y)$ tres veces, 2 una vez

$$\frac{5!}{1!1!3!} x^1 (-y)^3 (y^3)^0 2^1$$

$$\frac{5!}{1!1!3!} (x)^1 (-y)^0 (y^3)^1 2^3 + \frac{5!}{1!1!3!} x^1 \overbrace{(-y)^3}^{= -y^3} (y^3)^0 \cdot 2^1$$

$$= 20 \cdot 2^3 xy^3 - 20 \cdot 2 \cdot xy^3$$

$$\Rightarrow \text{el coeficiente de } xy^3 \text{ es: } 20 \cdot 2^3 - 20 \cdot 2 = 20 \cdot 8 - 20 \cdot 2 \\ = 160 - 40 \\ = 120$$