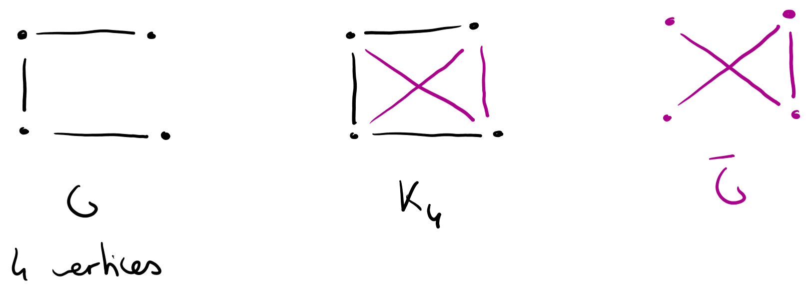
PRACTICO 9

Ejercicio 8

(a) Demostrar que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.



($\Rightarrow$) Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ isomorfos

queremos ver que $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos

como G_1 y G_2 son isomorfos existe $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que

* φ biyectiva
* $v, v' \in V_1$ son adyacentes en $G_1 \iff \varphi(v)$ y $\varphi(v') \in V_2$ son adyacentes en G_2

veamos que $\varphi : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de $\overline{G_1}$ en $\overline{G_2}$

* φ es biyectiva ✓
* $v, v' \in V_1$ son adyacentes en $\overline{G_1} \iff \varphi(v), \varphi(v') \in V_2$ son adyacentes en $\overline{G_2}$

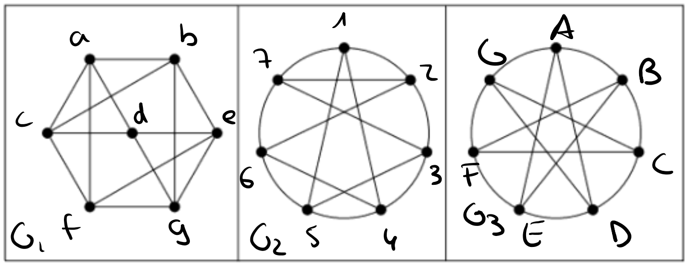
$v, v' \in V_1$ son adyacentes en $\overline{G_1} \iff v, v' \in V_1$ no son adyacentes en G_1
$\iff \varphi(v), \varphi(v') \in V_2$ no son adyacentes en G_2
$\iff \varphi(v), \varphi(v') \in V_2$ son adyacentes en $\overline{G_2}$

($\Leftarrow$) Si $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos entonces G_1 y G_2 son isomorfos

$\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos $\Rightarrow \overline{\overline{G_1}}$ y $\overline{\overline{G_2}}$ son isomorfos

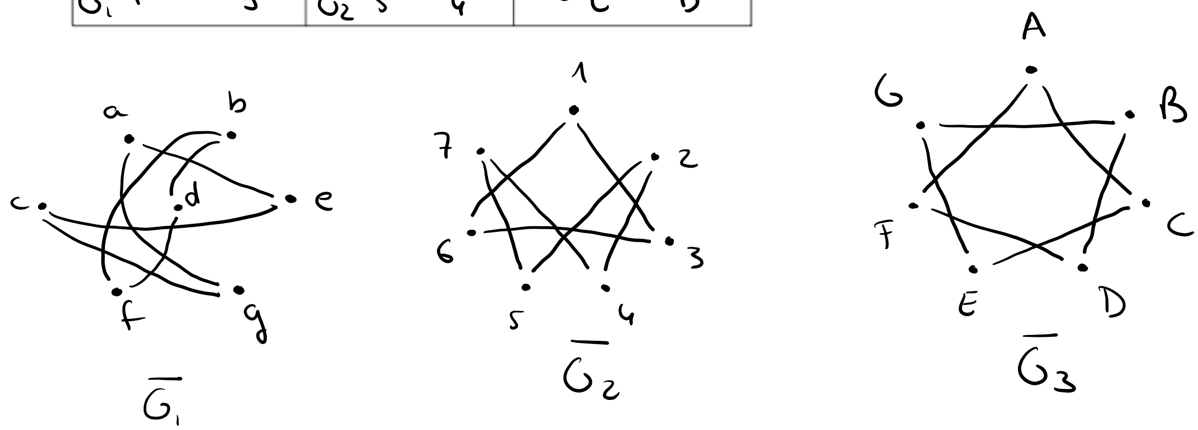
$\Rightarrow G_1$ y G_2 son isomorfos

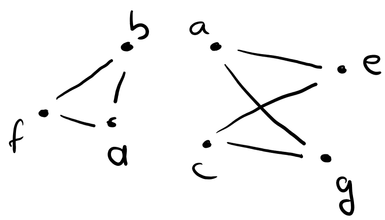
(b) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 3 son isomorfos?



G_1 y G_2 isomorfos?

$\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ isomorfos?

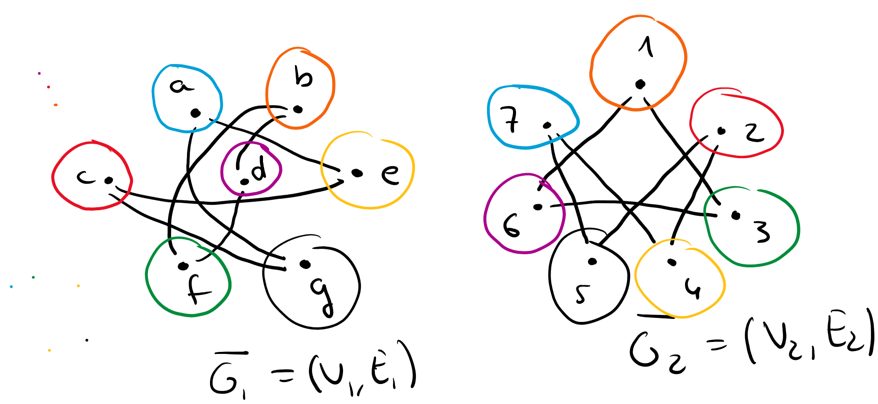




$\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ tienen dos componentes conexas

$\overline{G_3}$ tiene una sola componente conexa

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{G_1} \text{ y } \overline{G_3} \text{ no son isomorfos} \Rightarrow G_1 \text{ y } G_3 \text{ no son isomorfos} \\ \overline{G_2} \text{ y } \overline{G_3} \text{ no son isomorfos} \Rightarrow G_2 \text{ y } G_3 \text{ no son isomorfos} \end{cases}$



$\varphi: V_1 \longrightarrow V_2$

$\varphi(b) = 1$

$\varphi(d) = 6$

$\varphi(f) = 3$

$\varphi(a) = 7$

$\varphi(c) = 2$

$G_1 = (V_1, E_1)$

$\varphi(a) = 1$

$\varphi(c) = 2$

$\varphi(g) = 5$

$\varphi(e) = 4$

* φ es biyectiva ✓

* chequear las adyacencias

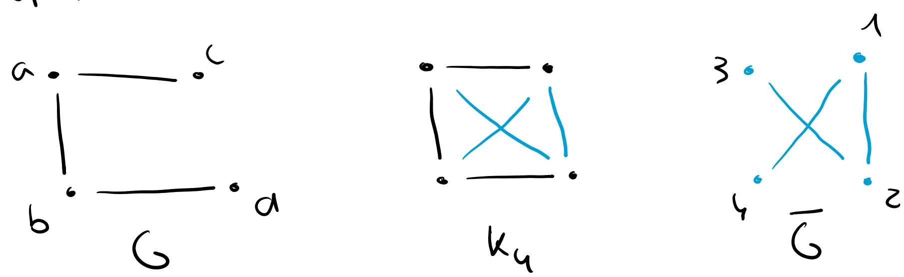
a es adyacente a e y g : $\underset{7}{\varphi(a)}$ es adyacente a $\underset{4}{\varphi(e)}$ y $\underset{5}{\varphi(g)}$ ✓

$\bar{G}_1$ y $\bar{G}_2$ son isomorfos $\Rightarrow$ G_1 y G_2 son isomorfos.

(c) Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de G.

$G = (V, E)$

$|V| = n$



$$\# \text{aristas de } \bar{G} = \# \text{aristas de } K_n - \# \text{aristas de } G$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - |E|$$

$$\# \text{aristas de } K_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

K_n tiene n vertices todos de grado $n-1$

$$\sum gr(v) = 2|E|$$

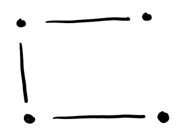
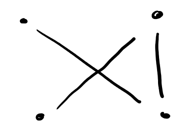
$$n(n-1) = 2|E|$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

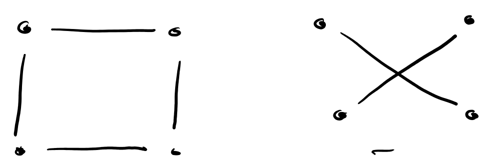
(d) Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de n vértices.

G es autocomplementario si G y $\overline{G}$ son isomorfos

ejemplo:

 es autocomplementario porque es isomorfo a 

$n = 4 \rightsquigarrow |E| = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3$ ✓



$G \qquad \overline{G}$

$G = (V, E)$ grafo autocomplementario

$|V| = n$

* # aristas de $\overline{G} = \frac{n(n-1)}{2} - |E| \rightsquigarrow |\overline{E}| = \frac{n(n-1)}{2} - |E|$

* G y $\overline{G}$ son isomorfos $\Rightarrow \underbrace{\text{\# aristas de } G}_{\overset{\shortparallel}{|E|}} = \underbrace{\text{\# aristas de } \overline{G}}_{\overset{\shortparallel}{|\overline{E}|}}$

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2} - |E| \Rightarrow 2|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{n(n-1)}{4}$$ $\rightsquigarrow$ la mitad de la cantidad de aristas de K_n

(f) Determinar para qué valores de n existe un grafo autocomplementario de n vértices.

$G = (V, E)$ grafo autocomplementario con n vertices

$$|E| = \frac{n(n-1)}{4}$$

G autocomplementario $\Longrightarrow$ $n(n-1)$ multiplo de 4

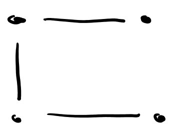
$$\Longrightarrow \begin{cases} n \text{ es multiplo de } 4 \rightsquigarrow n = 4k \\ n-1 \text{ es multiplo de } 4 \rightsquigarrow n = 4k+1 \end{cases}$$

$4(k+1)+1$

Si $n \neq \underline{4k}$ y $n \neq \underline{4k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces <u>no</u> existe un grafo autocomplementario con n vertices.

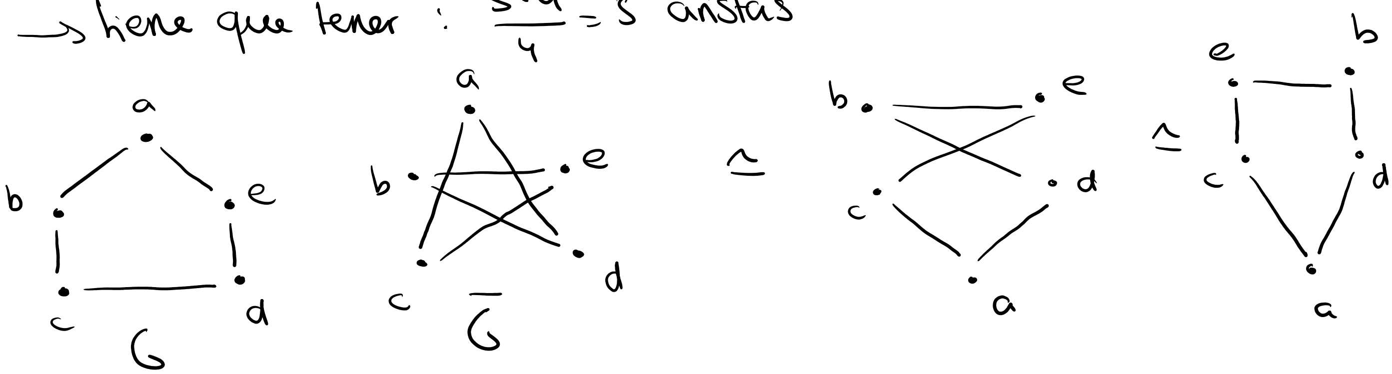
<u>Si $k = 1$</u>

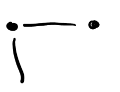
- grafo autocomplementario con 4 vertices



- grafo autocomplementario con 5 vertices.

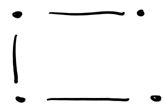
$\rightarrow$ tiene que tener : $\frac{5 \cdot 4}{4} = 5$ aristas



Vamos a construir un grafo autocomplementario con 8 vertices a partir de 

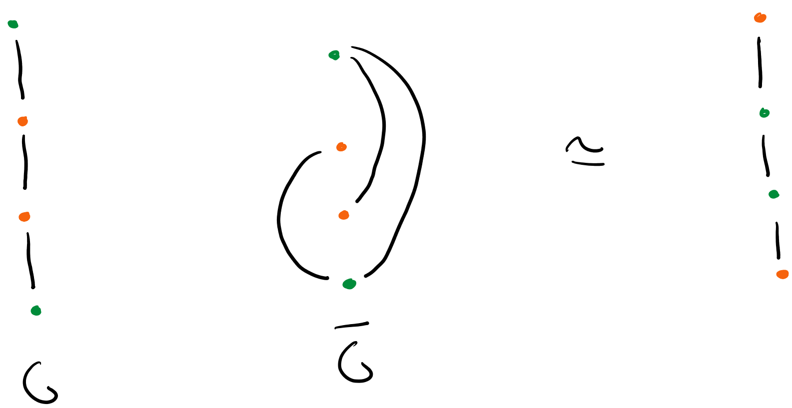
Para todo $k \geq 1$ existe un grafo autocomplementario con $4k$ vertices.

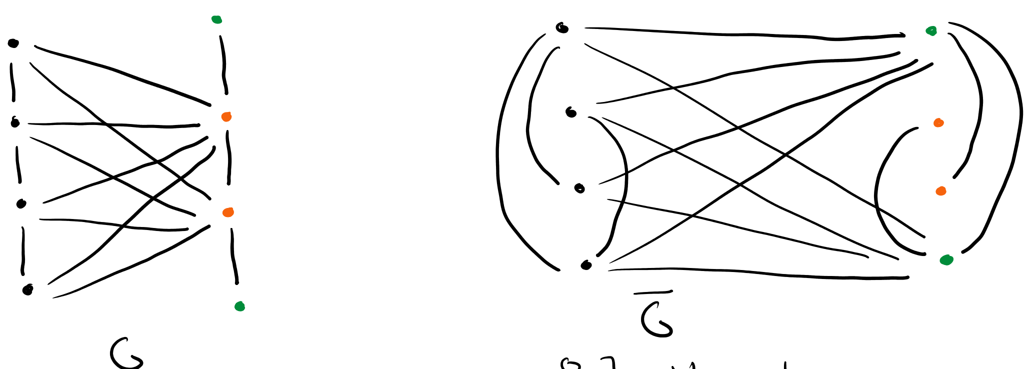
<u>Paso base</u>:



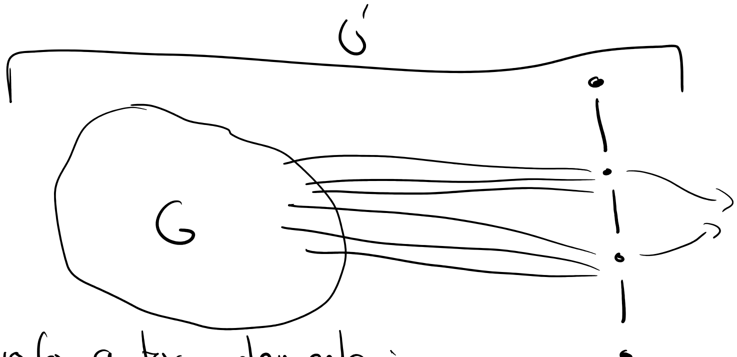
Paso inductivo

previa: construimos un autocomplementario con $4 \cdot 2$ vertices.





autocomplementario con 8 vertices: $\frac{8 \cdot 7}{4} = 14$ aristas



esto dos vertices se conectan con todos los de G

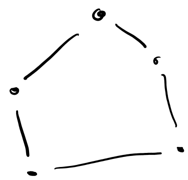
grafo autocomplementario con 4k vertices

$\Rightarrow$ G' es un grafo autocomplementario

$\Rightarrow G'$ es un grafo autocomplementario con $4(k+1)$ vertices.

Para todo $k \geq 1$ existe un grafo autocomplementario con $4k+1$ vertices

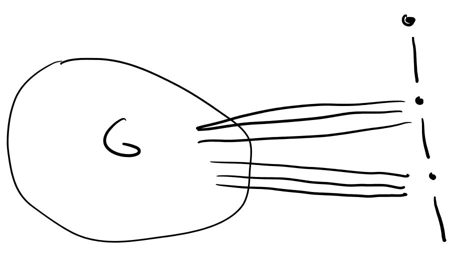
Paso base

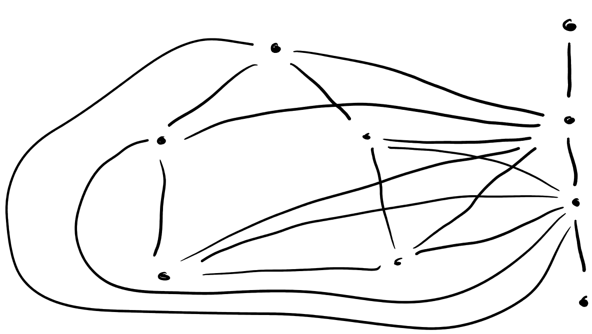


$4(k+1)+1 = 4k+4+1 = \underbrace{4k+1}+4$

Paso inductivo

Suponemos que existe un grafo G autocomplementario con $4k+1$ vertices y queremos construir uno con $4(k+1)+1$ vertices





Ejercicio 3

Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas*.

$a\bar{R}b \iff a \not{R} b$

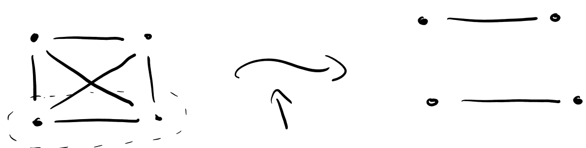
$aR^{-1}b \iff bRa$

$a\, R\circ S\, b \iff$ existe c tq aRc y cSb

Ejercicio 5 Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a K_n para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

K_3

K_4:



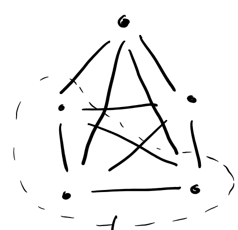
hay que quitar 4 aristas

K_5:

$j=2$

sacamos $\underset{\substack{\| \\ 5-2}}{3}$ aristas por vertices

hay que quitar 6 aristas



$j=3$

desconectamos 3 vertices

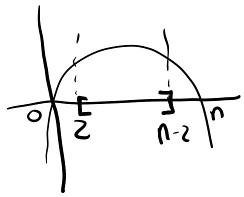
por cada vertice sacamos $\underset{\substack{\| \\ 5-3}}{2}$ aristas

K_n y queremos desconectar j vertices con $2 \leq j \leq n-2$

$f(j) =$ la cantidad de aristas que hay que quitar para desconectar j vertices

$= j(n-j) = -j^2 + nj$

buscamos el j que minimiza esta funcion



$f(j)$ se minimiza en $j=2$ y a $j=n-2$

y cuando desconectamos 2 vertices hay que quitar $2(n-2)$ aristas