

Ejercicio 9

El hipercubo H_n de dimensión n , es el grafo cuyos vértices son las n -uplas de ceros y unos, tales que dos n -uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

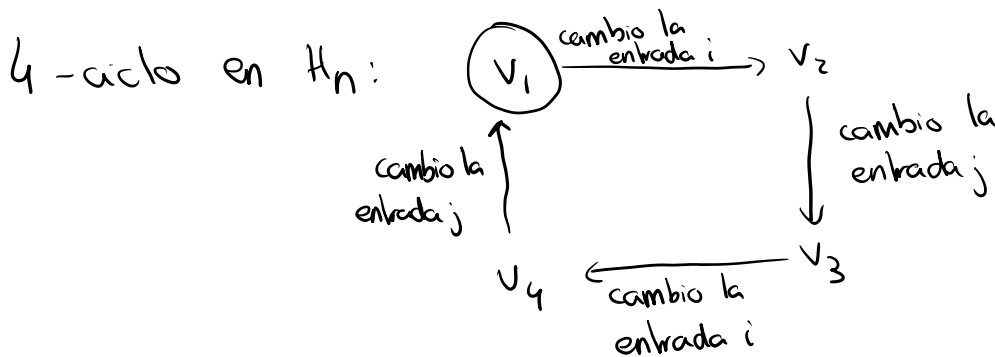
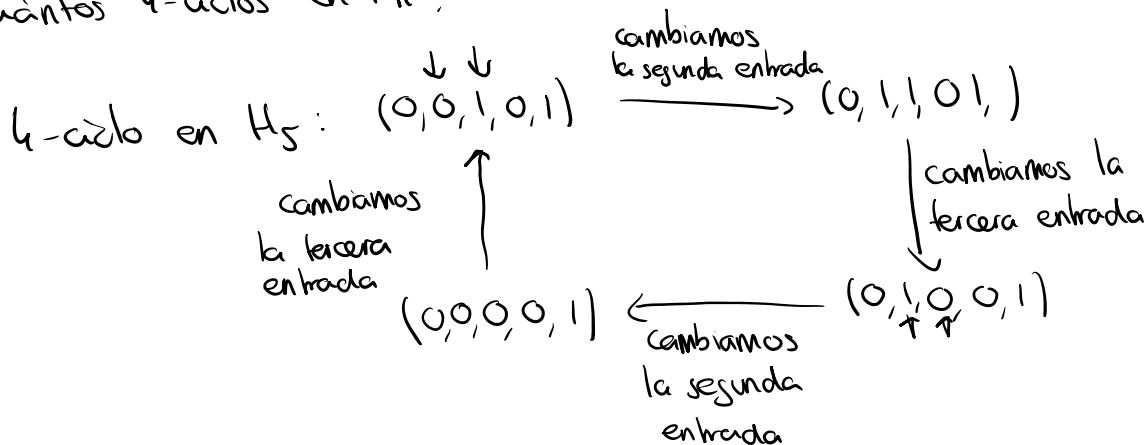
- (a) Hallar los conjuntos de vértices de H_1 , H_2 , H_3 y dibuje dichos grafos.
- (b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n ?
- (c) Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
- (d) Demostrar que H_n no tiene 3-ciclos.
- (e) ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n ?

H_n : vértices = n -uplas de 0 y 1

dos vértices son adyacentes si coinciden en todas sus entradas menos en una

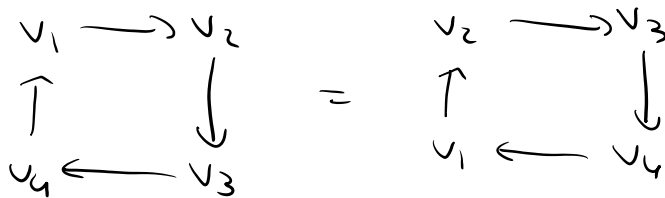
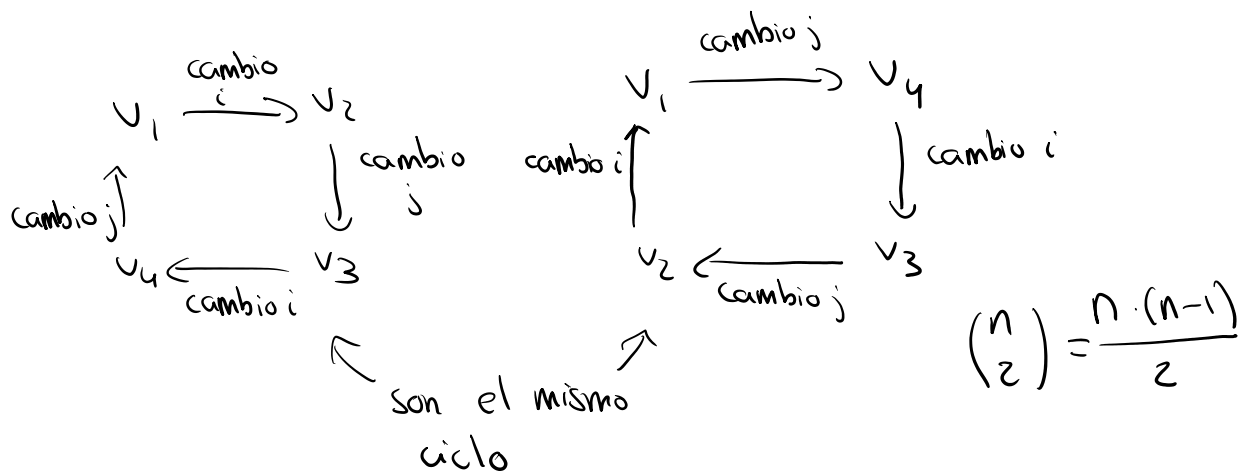
$\begin{matrix} 2 \text{ pos} & 2 \text{ pos} & & 2 \text{ pos} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (-, -, \dots, -) \end{matrix}$

e) Cuántos 4-ciclos en H_n ?



Paso 1: elegimos "el primer vértice" del ciclo
 $\rightarrow 2^n$ posibilidades

Paso 2: elegimos las dos entradas que vamos a cambiar
 $\rightarrow \binom{n}{2}$ posibilidades (no importa el orden en que cambio las dos entradas)

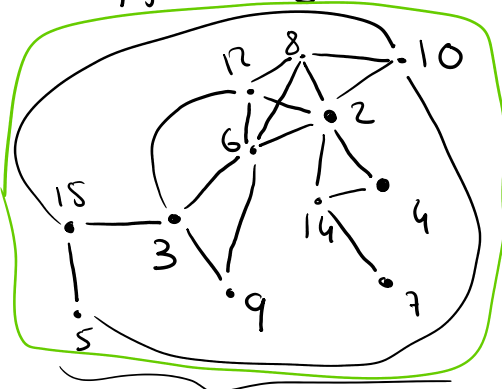


si elegimos como primer vertice v_2 nos da el mismo ciclo
 $\Rightarrow$ estamos contando cada ciclo 4 veces

la cantidad de h -ciclos es $\frac{2^n \binom{n}{2}}{4} = 2^{n-2} \binom{n}{2}$

Ejercicio 3 Sea G el grafo cuyos vértices son $\{1, 2, \dots, 15\}$ y tal que i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. Determinar la cantidad de componentes conexas de G .

i y j son adyacentes si $\text{mcd}(i, j) > 1$



falta un montón
de aristas

4 componentes conexas

$$\text{mcd}(1, 2) = 1$$

$$\text{mcd}(2, 4) = 2$$

$$\text{mcd}(2, 2 \cdot k) = 2$$

$$\text{mcd}(6, 8) = 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{mcd}(14, 7) = 7$$

$G = (V, E)$ un grafo

dos vértices están relacionados si existe un camino que los une

$i R_j \Leftrightarrow$ existe un camino que empieza en i y termina en j

reflexiva: $i R_i$ porque tomamos el camino trivial

simétrica: $i R_j \Rightarrow j R_i$?

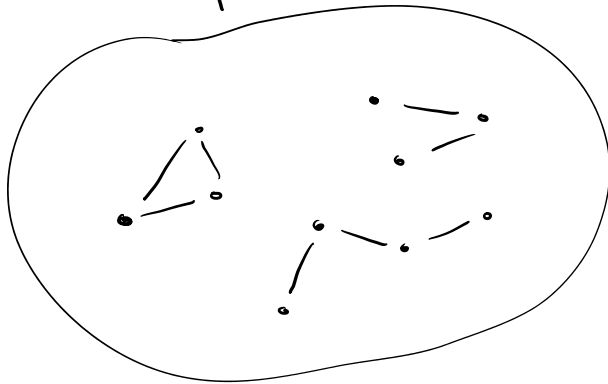
$i R_j \Rightarrow$ existe un camino de i en j

recorriéndolo en el sentido opuesto tengo un camino de j en i

$\Rightarrow j R_i$

transitiva: $i R_j$ y $j R_k \Rightarrow i R_k$ concatenando el camino de i en j con el camino de j en k

las clases de equivalencia son las componentes conexas



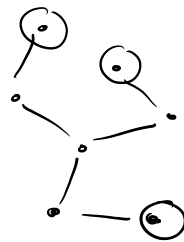
Ejercicio 4 ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

$\rightarrow$ 8 vértices

árbol = grafo conexo y acíclico
no tiene ciclos

$G = (V, E)$

Sea k la cantidad de hojas
vértices de grado 1



$$|V| = 8 + k$$

como G es un árbol $|E| = |V| - 1$

(a) Probar que si G es un grafo conexo entonces $|E| \geq |V| - 1$.

(b) Probar que si G es un grafo si G es un grafo acíclico entonces $|E| \leq |V| - 1$.

$$|E| = 7 + k$$

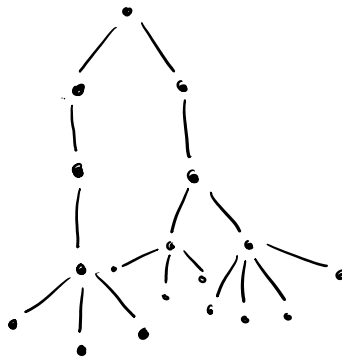
$$\sum_{v \in G} \text{gr}(v) = 2|E|$$

$$\sum_{v \in G} \text{gr}(v) = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 + k \cdot 1 = 24 + k$$

$$\Rightarrow 24 + k = 2(7 + k)$$

$$\Rightarrow 24 + k = 14 + 2k$$

$$\Rightarrow \boxed{10 = k}$$



Ejercicio 6

(a) Probar que si G es un grafo conexo entonces $|E| \geq |V| - 1$.

vamos a probarlo por inducción en la cantidad de vertices

G un grafo con n vertices entonces tiene por lo menos $n-1$ aristas

Paso base:

$n=1$: $G = \overset{a}{\bullet}$ es conexo y tiene 0 aristas

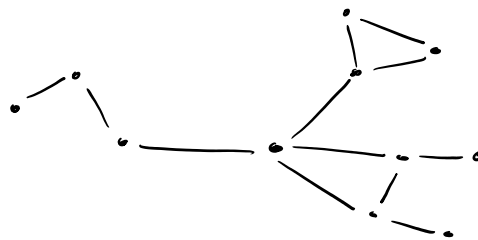
$n=2$: $G = \overset{a}{\bullet} \text{ --- } \overset{b}{\bullet}$ para que sea conexo tiene que tener una arista

$n=3$: $G = \overset{a}{\bullet} \text{ --- } \bullet \text{ --- } \overset{b}{\bullet}$ para que sea conexo tiene que tener por lo menos dos aristas

Paso inductivo

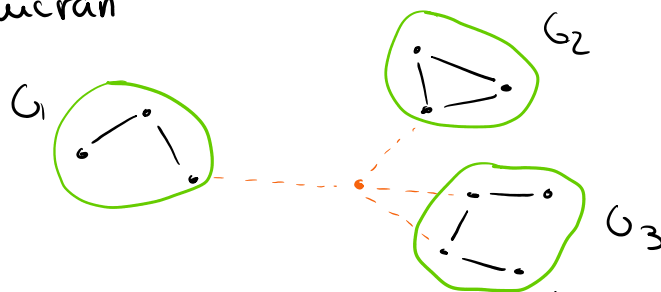
Hipótesis: Si $G=(V,E)$ es un grafo conexo y $|V| \leq n$ entonces $|E| \geq |V| - 1$

Tesis: Si $G=(V,E)$ es un grafo conexo y $|V| = n+1$ entonces $|E| \geq |V| - 1$
 $|E| \geq n+1 - 1 = n$



G conexo con $n+1$ vertices

le sacamos un vertex a G y todas las aristas que lo involucran



$G'=(V',E')$ con n vertices

G' tiene k componentes conexas $G_1, G_2, \dots, G_k$

$$G_i = (V_i, E_i) \leadsto |V_i| \leq n$$

$$\Rightarrow |E_i| \geq |V_i| - 1 \text{ por hipótesis inductiva}$$

$$|E'| = |E_1| + |E_2| + \dots + |E_k|$$

$$\geq |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + \dots + |V_k| - 1$$

$$= \underbrace{|V_1| + |V_2| + \dots + |V_k|}_{|V'|} - k$$

$$= |V'| - k$$

$$= n - k$$

le agregamos un vertice a G'

para que el resultado sea un grafo conexo hay que agregar por lo menos k aristas

$$|E| \geq |E'| + k \geq n - k + k = n = \frac{(n+1) - 1}{|V|}$$

$$\Rightarrow |E| \geq |V| - 1$$