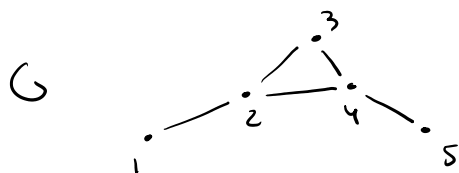


Ejercicio 2 Hallar el diámetro de los grafos K_n , $K_{n,m}$, P_n , C_n y del grafo de Petersen.

distancia entre dos vertices = la longitud del camino más corto que los une



$$d(1,2) = 1$$

$$d(1,4) = 2$$

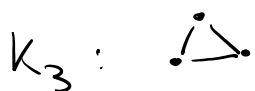
$$d(1,5) = 3$$

diámetro de un grafo = la mayor distancia entre dos vertices del grafo

$$\text{diam}(G) = 3$$

K_n = grafo completo con n vertices

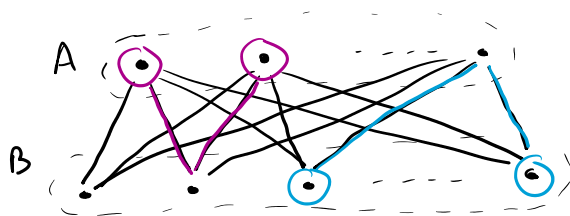
→ todos los vertices son adyacentes



Sean x, y vertices de K_n : $d(x, y) = 1$

⇒ el diámetro de K_n es 1

$K_{n,m}$ = grafo bipartito completo con $n+m$ vertices



n vertices

m vertices

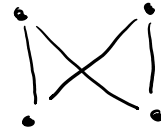
$n \neq 1$ o $m \neq 1$

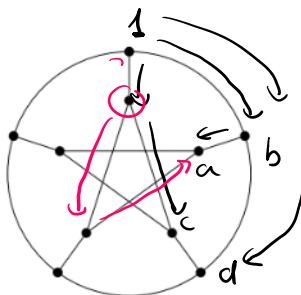
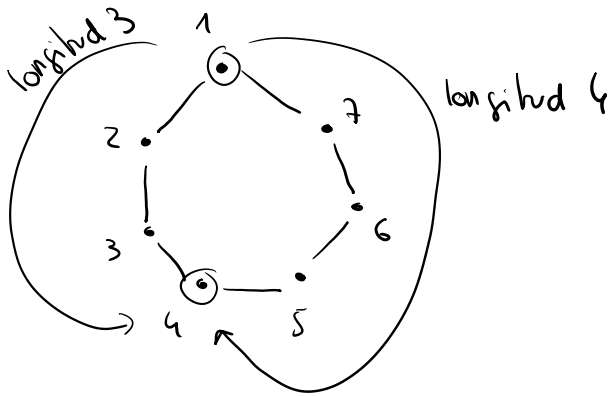
$$\text{si } x \in A, y \in B \quad d(x, y) = 1$$

$$\text{si } x \in A, y \in A \quad d(x, y) = 2$$

$$\text{si } x \in B, y \in B \quad d(x, y) = 2$$

$$\text{diam } K_{n,m} = 2$$

$K_{1,1}$  $\text{diam } K_{1,1} = 1$ $K_{2,2}$  $P_n =$ camino simple con n vertices $P_3: \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \end{array} \quad \text{diam } P_3 = 2$ $P_4: \begin{array}{c} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \quad \text{diam } P_4 = 3$ $P_n: \begin{array}{c} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \dots \cdot \text{---} \cdot \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-1 \quad n \end{array} \quad \text{diam } P_n = n-1$ $C_n =$ ciclo con n vertices $C_3: \begin{array}{c} \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \cdot \text{---} \cdot \end{array} \quad \text{diam } C_3 = 1$ $C_4: \begin{array}{c} \cdot \text{---} \cdot \\ | \quad | \\ \cdot \text{---} \cdot \end{array} \quad \text{diam } C_4 = 2$ $C_5: \begin{array}{c} \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \cdot \text{---} \cdot \\ | \quad | \\ \cdot \text{---} \cdot \end{array} \quad d(1,3) = 2$ $\text{diam } C_5 = 2$ $\begin{array}{c} \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ \cdot \text{---} \cdot \\ | \quad | \\ \cdot \text{---} \cdot \end{array} \quad d(1,4) = 2$ $\text{diam } C_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$



(i) Grafo de Petersen

$$d(x, y) \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \end{cases}$$

$$\text{diam}(\text{Petersen}) = 2$$

Ejercicio 9

El hipercubo H_n de dimensión n , es el grafo cuyos vértices son las n -uplas de ceros y unos, tales que dos n -uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

- Hallar los conjuntos de vértices de H_1 , H_2 , H_3 y dibuje dichos grafos.
- ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n ?
- Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
- Demostrar que H_n no tiene 3-ciclos.
- ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n ?

H_n = hipercubo de dimensión n

vértices $\overbrace{(\quad \quad \quad \quad \quad)}^{n \text{ entradas}}$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $1 \ 0 \ 0 \quad 1 \ 0 \ 0 \quad 1 \ 0 \ 0$

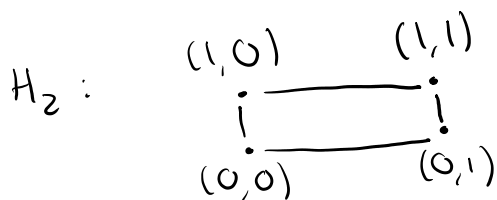
dos vértices son adyacentes cuando coinciden en todas sus entradas salvo en una

en H_4 : $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 1, 0)$ son adyacentes
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$

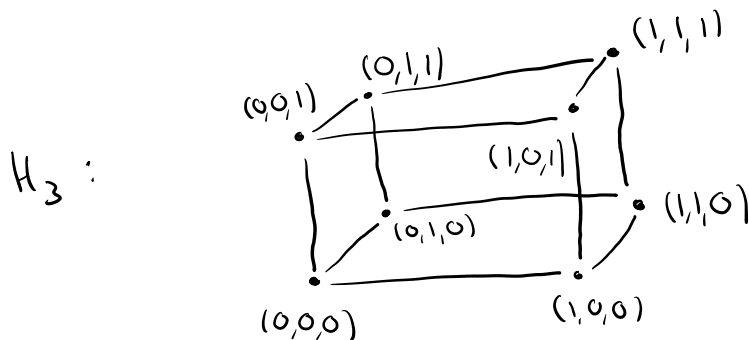
$(1, 1, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$ son adyacentes
 $\uparrow \quad \quad \uparrow$

$(1, 0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$ no son adyacentes
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \uparrow$

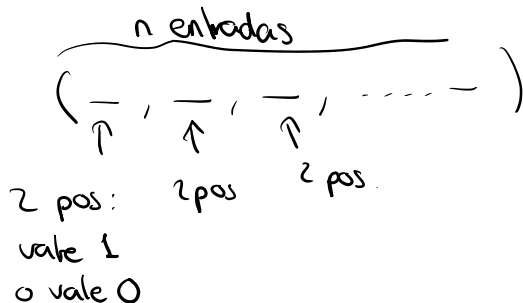
a) H_1 :  2 vertices



$(1,0) \text{ --- } (1,1) \rightsquigarrow$ copia de H_1



b) cantidad de vertices de H_n ?



2^n vertices

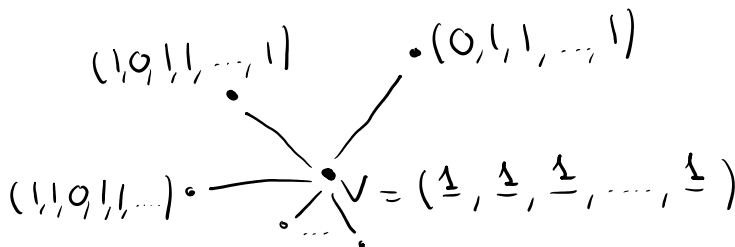
Cantidad de aristas?

$H_n = (V_n, E_n)$

$$\sum_{v \in V_n} \text{gr}(v) = 2|E_n|$$

$$G = (V, E)$$

$$\sum_{v \in V} \text{gr}(v) = 2|E|$$



la cantidad de vertices adyacentes a v es n

$$\sum_{v \in V_n} g_r(v) = \sum_{v \in V_n} n = \frac{n + n + n + \dots + n}{2^n \text{ nodes}} = n2^n$$

$$2|E_n| = \sum_{v \in V_n} g_r(v) = 2^n n$$

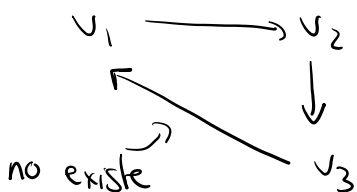
$$|E_n| = \frac{z^n n}{z} = z^{n-1} n$$

c) dos caminos simples en H_5 de $(0,0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1,0)$

$$(0, 0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0) \quad (\text{son adyacentes})$$
$$(0,0,1,1,0) \rightarrow (0,0,1,1,1) \rightarrow (0,0,0,1,1) \rightarrow (0,0,0,1,0)$$

d) H_n no tiene 3-ciclos

Supongamos que hay un 3-ciclos



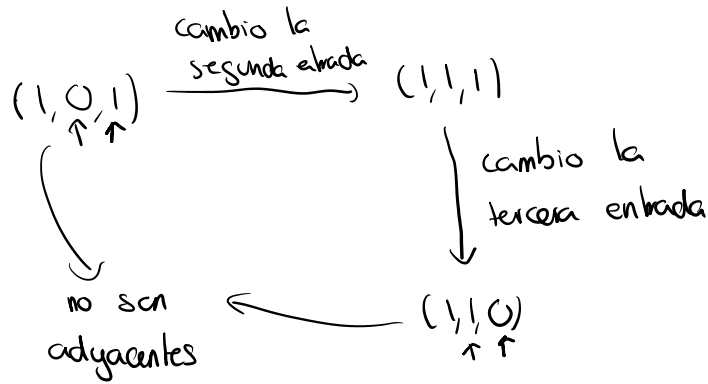
3-ciclo = ciclo con 3 vertices

v_1 y v_2 difieren en exactamente una entrada

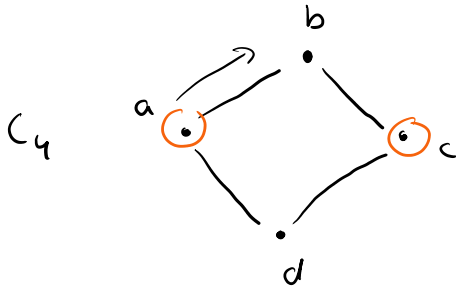
v_2 y v_3 difieren en exactamente una entrada y $v_3 \neq v_1$

$\Rightarrow v_1$ y v_3 difieren en las entradas

$\Rightarrow v_1$ y v_3 no son adyacentes



Ejercicio 7 Sean a y c dos vértices a distancia 2 en C_4 . Determinar la cantidad de caminos de largo n en C_4 que empiezan en a y terminan en c .



si $n=1 \rightsquigarrow$ cero caminos

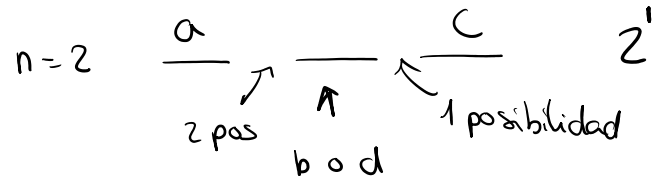
si $n=2 \rightsquigarrow$ 2 caminos

si $n=3 \rightsquigarrow$ 0 caminos

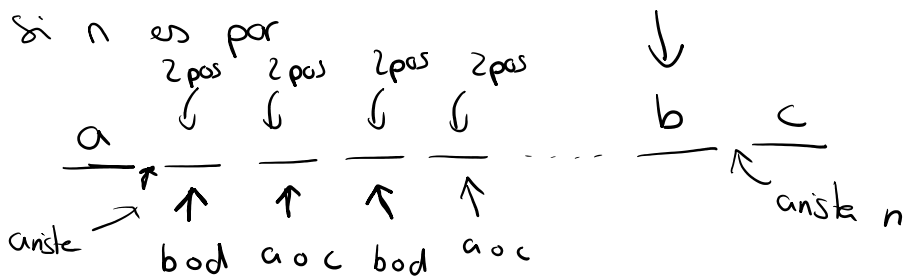
si $n=4 \rightsquigarrow$ hay caminos

$n=2: a \rightarrow b \rightarrow c \quad a \rightarrow d \rightarrow c$

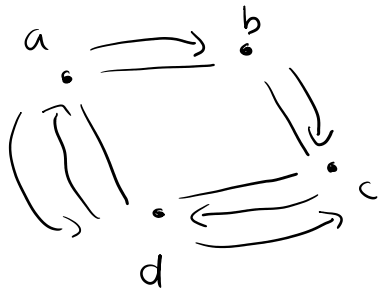
si n es impar: cero camino



si n es par



2^{n-1} caminos de a en c



2^{pos} 2^{pos} 2^{pos} 2^{pos} 2^{pos} 1^{pos}
 $a \downarrow b \downarrow c \downarrow d \downarrow a \downarrow d \downarrow c$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

2^5 caminos

cantidad oristas
 del camino
 $n=6$