

Relaciones de orden

Sea A un conjunto y R una relación en A

Decimos que R es una relación de orden si R es:

* reflexiva: aRa para todo a

* antisimétrica: aRb y $bRa \Rightarrow a=b$

* transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

en lugar de R vamos a escribir $\leq$

Ejercicio 10 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ si y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

b) $A =$ los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$

$\emptyset$

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

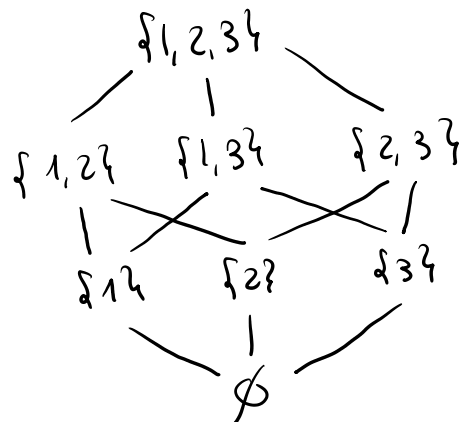
$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

$\{1, 2, 3\}$

$B \leq C$ si $B \subseteq C$

$\emptyset \leq \{1\}$

$\{3\} \leq \{1, 3\}$ $\{3\} \leq \{2, 3\}$ $\{3\} \leq \{1, 2, 3\}$



Ejercicio 10 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ si y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$

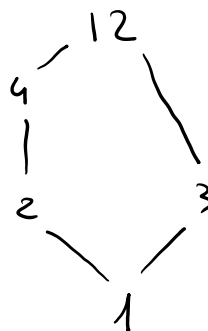
$x \leq y$ si y es múltiplo de x

$$1 \leq 2 \quad 1 \leq 3 \quad 1 \leq 4 \quad 1 \leq 12$$

$$2 \leq 4 \quad 2 \leq 12$$

$$3 \leq 12$$

$$4 \leq 12$$



Ejercicio 11 Calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre $\{1, 2, 3\}$.

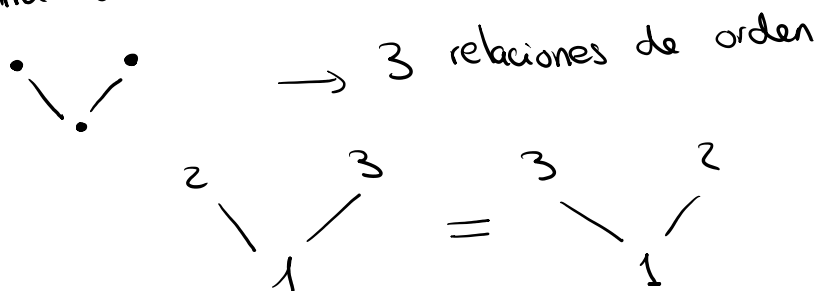
① el diagrama de Hasse tiene la forma

• • • → 1 relación de orden

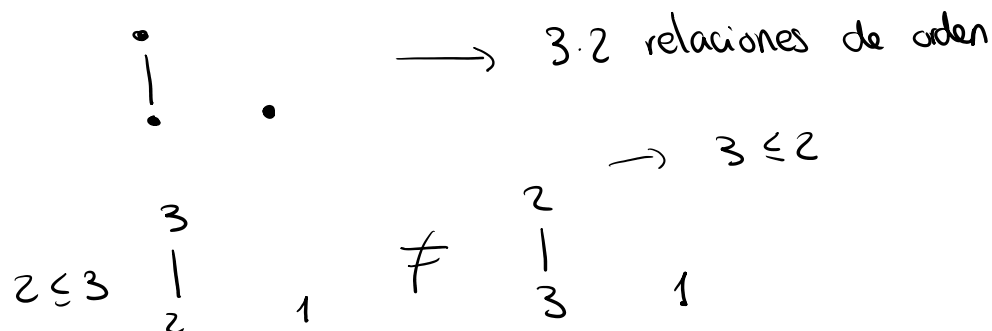
② el diagrama de Hasse tiene la forma

! → $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ relaciones de orden

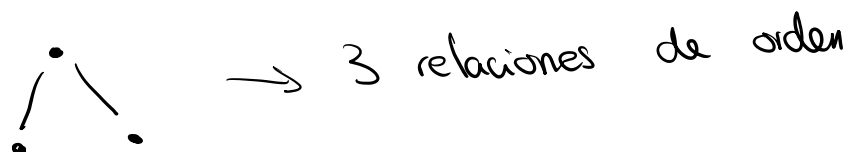
③ diagrama de Hasse:



④ diagrama de Hasse



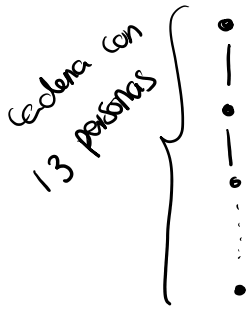
⑤ diagrama de Hasse



Por la regla de la suma la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3\}$ es: $1 + 6 + 3 + 6 + 3 = 19$

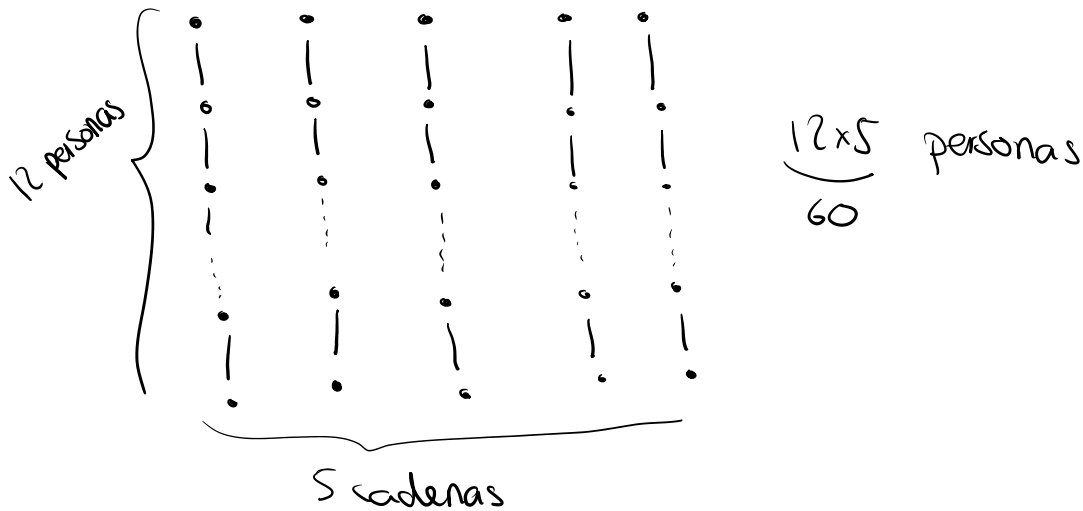
Ejercicio 14 Demostrar que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

A = conjunto de 61 personas
 aRb si a es descendiente de b

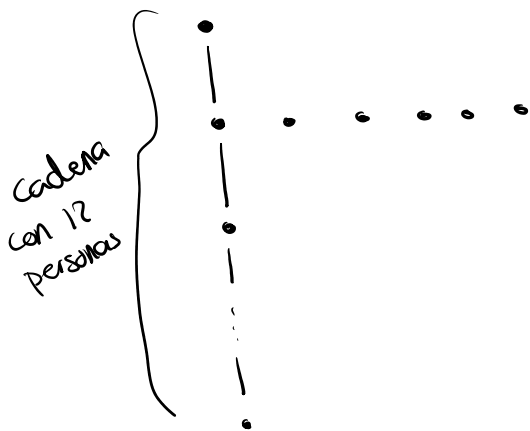


Supongamos que :

- la cadena más grande tiene 12 personas
- la anticadena más grande tiene 5 personas



Supongamos que la cadena más grande tiene 12 personas

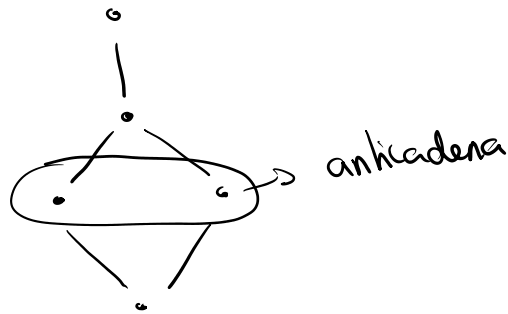
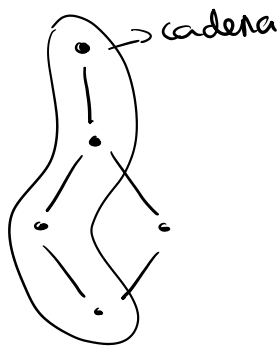


$$f: \overline{A}^{\overline{61}} \rightarrow \{\text{niveles}\}^{\overline{12}}$$

por lo tanto existe un nivel que tiene

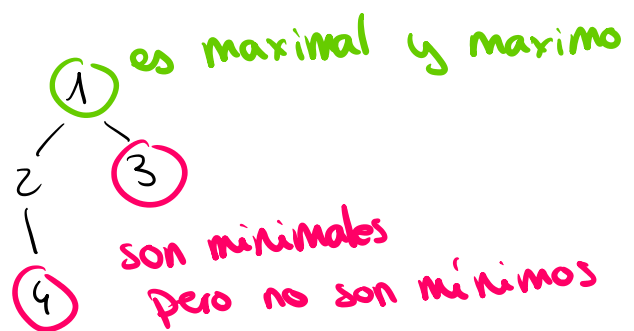
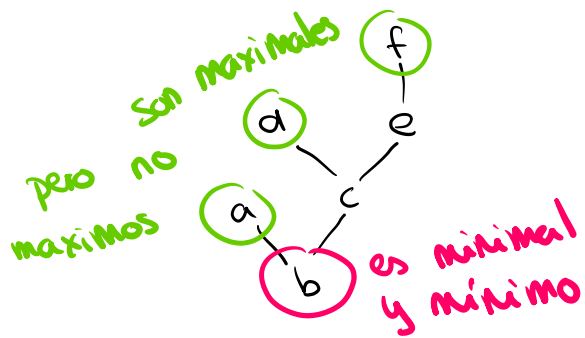
por lo menos $\left\lceil \frac{61}{12} \right\rceil$ preimágenes

$$\frac{61}{12} = 5,08$$



$\leq$ relación de orden en A

- $x \in A$ es maximal si no existe $a \in A$ tal que $x < a$



- $x \in A$ es maximo si $a \leq x$ para todo $a \in A$

Prop: si A tiene dos maximales distintos $\Rightarrow$ no tiene maximo

si A tiene un unico maximal $M \Rightarrow M$ es máximo

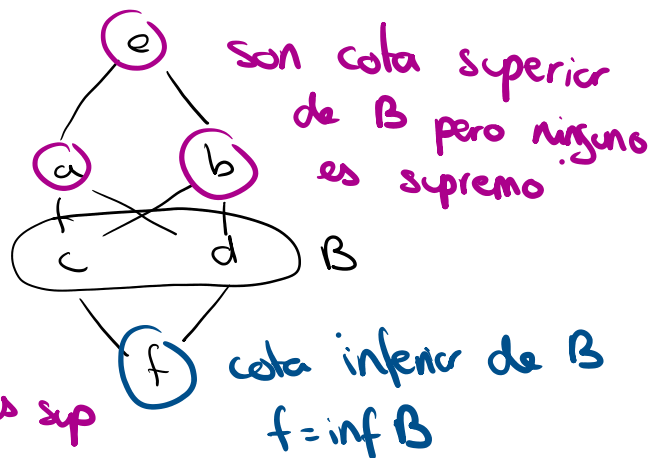
- $x \in A$ es minimal si no existe $a \in A$ tal que $a < x$
- $x \in A$ es mínimo si $x \leq a$ para todo $a \in A$

$$B \subseteq A$$

* x es cota superior de B si $b \leq x$
para todo $b \in B$

* x es supremo de B si

$x \leq x'$ para todo x' cota superior de B



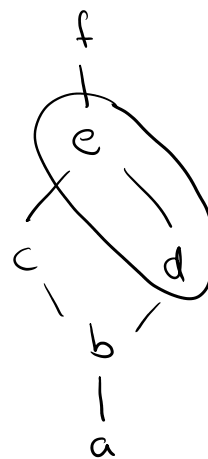
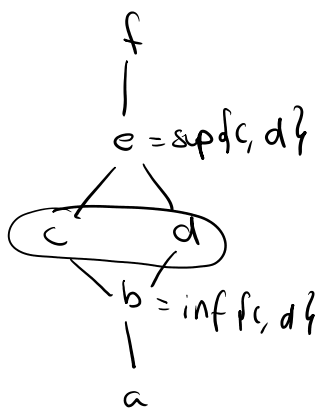
$$b \leq e \Rightarrow e \text{ no es sup}$$

$$f = \inf B$$

* x es cota inferior de B si $x \leq b$ para todo $b \in B$

* x es infimo de B si $x' \leq x$ para todo x' cota inferior

$(A, \leq)$ es un retículo si para todo $x, y \in A$ existe $\left\{ \begin{array}{l} \sup\{x, y\} \\ \inf\{x, y\} \end{array} \right.$



$$e \leq e$$

$$d \leq e$$

$\Rightarrow e$ cota superior

$$e = \sup\{e, d\}$$

cotas inferiores de $\{e, d\}$ son d, b, a

$$\inf\{e, d\} = d$$

Ejercicio 12 Hallar el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $1 \leq 2$ y $3 \leq 4$
 queremos buscar todos diagramas de Hasse que tengan

