Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

$$M(R) = (m_{ij})$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R a_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

si R es simétrica $\quad m_{12} = 1 \Rightarrow a_1 R a_2 \Rightarrow a_2 R a_1 \Rightarrow a_{21} = 1$

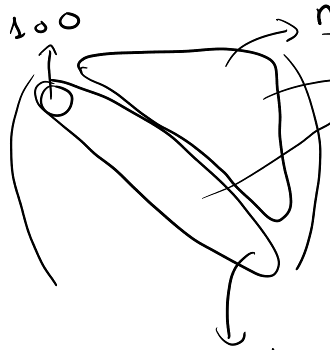
$$\begin{array}{c|c} & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \cdots \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} \diagdown & 1 & & 1 \\ 1 & \diagdown & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$m_{ij} = 1 \Rightarrow a_i R a_j \Rightarrow a_j R a_i \Rightarrow m_{ji} = 1$

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \underbrace{M(R) \text{ es simétrica}}_{m_{ij} = m_{ji}}$$

¿cuántas relaciones simétricas podemos en un conjunto de n elementos?

$M(R)$



$\frac{n^2-n}{2}$ entradas

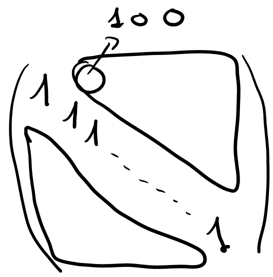
con decir si estas entradas de la matriz valen 0 o 1 ya queda determinada la relación

n entradas

$\Rightarrow$ la cantidad de relaciones simétricas es:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}+n} = 2^{\frac{n^2-n+2n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

¿cuál es la cantidad de relaciones reflexivas que podemos definir en un conjunto de n elementos?

$M(R) =$ 

cantidad de relaciones reflexivas:

$$2^{n^2-n}$$

Relaciones de equivalencia

Sea R una relación en un conjunto A

Decimos que R es una relación de equivalencia si es:

* reflexiva: aRa para todo $a \in A$
* simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$
* transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

sea $a \in A$:

$\bar{a} = [a] = \{b \in A : aRb\}$ clase de equivalencia de a

$a \in [a]$

conjunto cociente: $A/_R = \{[a] : a \in A\}$

ejemplo: $\mathbb{Z}$ y aRb si a y b tienen el mismo resto al dividir entre 3

R es una relación de equivalencia?

* reflexiva: a y a tienen el mismo resto $\Rightarrow aRa$

* simétrica: $aRb \Rightarrow$ a y b tienen el mismo resto al dividir entre 3

$\Rightarrow$ b y a tienen el mismo resto al dividir entre 3

$\Rightarrow bRa$

* transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$?

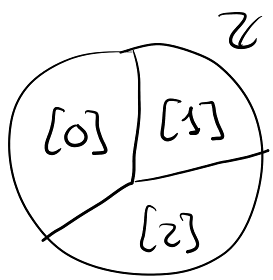
$\left.\begin{array}{l} aRb \Rightarrow \text{a y b tienen el mismo resto} \\ bRc \Rightarrow \text{b y c tienen el mismo resto} \end{array}\right\} \Rightarrow$ a y c tienen el mismo resto

$[0] = \{0, 3, -3, \dots\} \longrightarrow$ los múltiplos de 3

$[1] = \{1, 4, \dots\} \longrightarrow$ los enteros que tienen resto 1 al dividir entre 3

$[2] = \{2, 5, \dots\} \longrightarrow$ los enteros que tienen resto 2 al dividir entre 3

$-1 = 3 \cdot (-1) + 2$



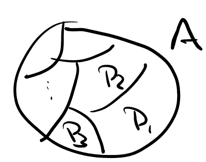
$\underbrace{[0] \cup [1] \cup [2]}_{\text{unión disjunta}} = \mathbb{Z}$

$[0] \cap [1] = \emptyset$

A un conjunto

una partición de A es una colección $P_1, P_2, \dots, P_n$ de subconjuntos de A

tales que:
* $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n = A$
* $P_i \cap P_j = \emptyset$ si $i \neq j$



si R es una relación de equivalencia en A, entonces las clases de equivalencia forman una partición de A.

Ejercicio 5

En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

$\mathbb{Z}$, aRb si $a^2 = b^2$

R es relación de equivalencia?

* reflexiva: aRa?

  $a^2 = a^2 \Rightarrow aRa$ ✓

* simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$?

  $aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bRa$ ✓

* transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$?

  $$\left.\begin{array}{l} aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \\ bRc \Rightarrow b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow aRc$$ ✓

$[0] = \{0\}$

$[1] = \{b \in \mathbb{Z} : 1Rb\} = \{b \in \mathbb{Z} : 1^2 = b^2\} = \{1, -1\}$

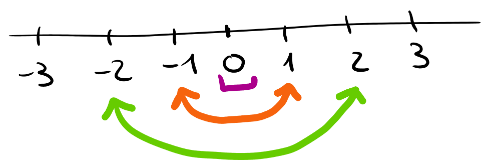
$[2] = \{b \in \mathbb{Z} : 2Rb\} = \{b \in \mathbb{Z} : 2^2 = b^2\} = \{b \in \mathbb{Z} : 4 = b^2\} = \{2, -2\}$

$\vdots$

$[n] = \{b \in \mathbb{Z} : nRb\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : n^2 = b^2\}$

$= \{n, -n\}$



$\mathbb{Z}/_R = \{[n] : n \in \mathbb{N}\}$ conjunto cociente

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

$\mathbb{R}^2$, vRw si existe a real no nulo tal que $w = av$

R es una relación de equivalencia?

* reflexiva: vRv?

  $v = 1 \cdot v \Rightarrow vRv$

* simétrica: $vRw \Rightarrow wRv$? → $v = bw$ $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

  algún $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

* simétrica: $vRw \Rightarrow wRv$.

$vRw \Rightarrow w = av$ para algún $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{a} w = \frac{1}{\cancel{a}} \cancel{a} v$

$\Rightarrow v = \frac{1}{a} w$

$\Rightarrow wRv$

$\Rightarrow u = cv \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

* transitiva: vRw y $wRu \Rightarrow vRu$?

$vRw \Rightarrow w = av$ para algún $a \neq 0$

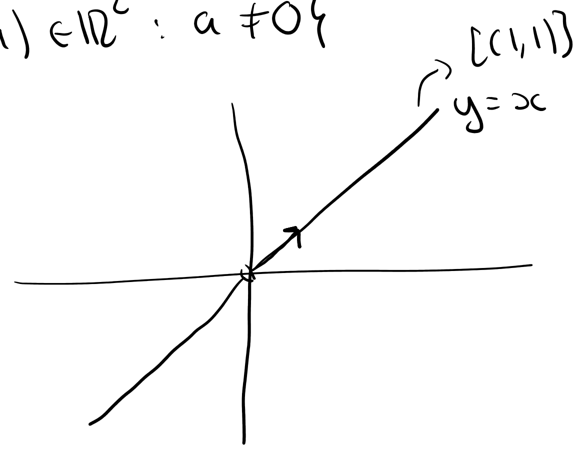
$wRu \Rightarrow u = bw$ para algún $b \neq 0$

$\Rightarrow u = bw = \underbrace{ba}_{\neq 0} v \Rightarrow vRu$

$[(1,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1,1) R (x,y)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(1,1)$ para algún $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0\}$

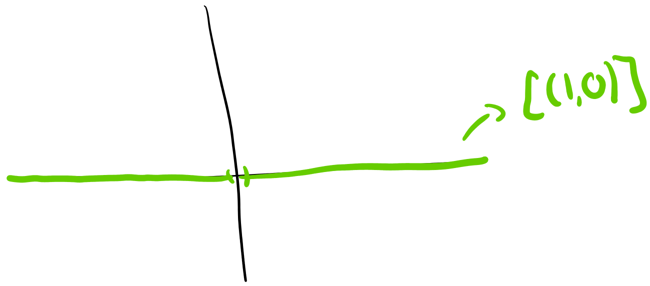
$= \{(a,a) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$



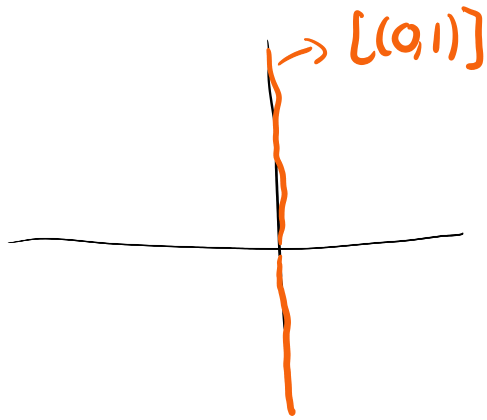
$[(1,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1,0) R (x,y)\}$

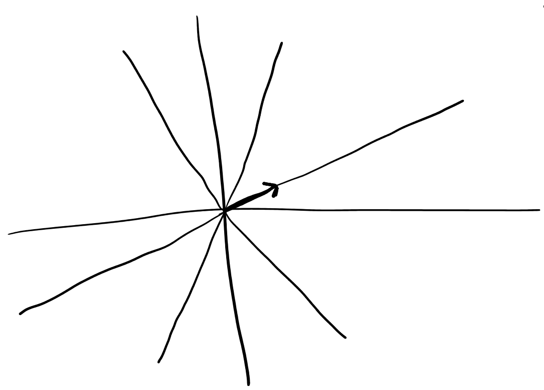
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(1,0) \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$

$= \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$



$$[(0,1)] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (0,1)\, R\, (x,y)\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y) = a(0,1) \quad a\neq 0\}$$
$$= \{(0,a)\in\mathbb{R}^2 : a\neq 0$$





$\mathbb{R}^2/_R$ conjunto cociente

$v\in\mathbb{R}^2$

$[v] = \{av : a\in\mathbb{R}, a\neq 0\}$

= la recta por el origen con vector v menos el punto (0,0)

Ejercicio 4

¿cantidad de relaciones antisimétricas en un conjunto de n elementos?

$A = \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad aRb$ y $bRa \Rightarrow a = b$

$\{(1,2),(2,1)\}$
- $\to (1,2) \in R$ y $(2,1) \notin R$
- $\to (2,1) \in R$ y $(1,2) \notin R$ $\quad$ 3 posibilidades
- $\to (1,2) \notin R$ y $(2,1) \notin R$

$i \neq j$

tenemos $\to$ $\{(i,j),(j,i)\}$
- $\to (i,j) \in R$ y $(j,i) \notin R$
- $\to (j,i) \in R$ y $(i,j) \notin R$ $\quad$ 3 posibilidades
- $\to (i,j) \notin R, (j,i) \notin R$

C^n_2 conjuntos de esta forma

tenemos $\to$ $\{(i,i)\}$
- $\to (i,i) \in R$ $\quad$ 2 posibilidades
- $\to (i,i) \notin R$

n conjuntos de esta forma

$$2^n \cdot 3^{C^n_2} = 2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$ relaciones antisimétricas

$$C^n_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$