Relaciones

Sea A un conjunto $\qquad R \subset A \times A$

una relación de A es un subconjunto de $A \times A = \{(x,y) : x \in A, y \in A\}$

a está relacionado con b si $(a,b) \in R$

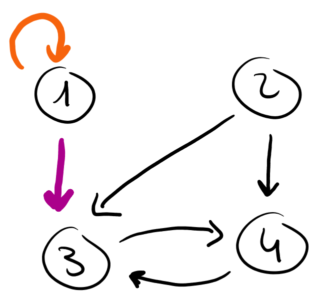
$$aRb$$

formas de representer una relación en $A = \{1,2,3,4\}$

① Dar los pares $\quad xRy$ si ....

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (4,3)\} \subset A \times A = \{(x,y) : x, y \in A\}$$

② Dar un grafo dirigido



③ Dar la matriz de la relacion

a_{11}

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } iRj \\ 0 & \text{si } i \not R j \end{cases}$$

fila i columna j

Decimos que una relación R en A es:

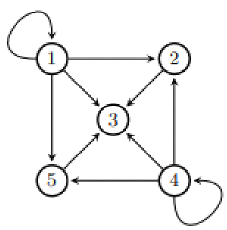
* reflexiva: xRx para todo $x \in A$
* irreflexiva: $x \not R x$ para todo $x \in A$

* simétrica: si $x R y$ entonces $y R x$ para todo $x, y \in A$
* antisimétrica: si $x R y$ e $y R x \Rightarrow x = y$ para todo $x, y \in A$

  si $x \neq y$ y $x R y \Rightarrow y \not R x$
* asimétrica: si $x R y \Rightarrow y \not R x$
* transitiva: si $x R y$ y $y R z \Rightarrow x R z$

Ejercicio 1

e) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



- reflexiva?

  $2 \not R 2$ entonces no es reflexiva.
- irreflexiva?

  $1 R 1$ entonces no es irreflexiva
- simétrica?

  $1 R 2$ pero $2 \not R 1$ entonces no es simétrica
- antisimétrica?

  $x R y$ e $y R x \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ \text{o} \\ x = y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = y$

  entonces es antisimétrica
- asimétrica?

  $1 R 1$ entonces no es asimétrica
- transitiva?

  $1R2$, $2R3$ y $1R3$ ✓

  $1R5$, $5R3$ y $1R3$ ✓

  $4R5$, $5R3$ y $4R3$ ✓

  $4R2$, $2R3$ y $4R3$ ✓

  entonces es transitiva.

Ejercicio 2

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

cantidad de relaciones sobre $A = \{a, b, c, d\}$

que verifican:
- R es simétrica
- $(a,b) \in R$
- $(c,c) \in R$

$$(a,b) \in R \underset{R \text{ simétrica}}{\Longrightarrow} (b,a) \in R$$

$$\{(a,b), (b,a), (c,c)\} \subset R$$

si $(a,c) \in R \underset{R \text{ simétrica}}{\Longrightarrow} (c,a) \in R$

$\{(a,c), (c,a)\} \subset R$

ninguno de los dos está en R

tenemos que decidir cuales de los siguientes subconjuntos están en R

$\{(a,c), (c,a)\} \to$ 2 posibilidades: lo incluyo en R o no

$\{(a,d), (d,a)\}$

$\{(b,c), (c,b)\}$

$\{(b,d), (d,b)\}$

$\{(c,d), (d,c)\}$

$\{(a,a)\}$

$\{(b,b)\}$

$\{(d,d)\}$

por la regla del producto hay

2^8 relaciones