Ejercicio 5
Verificar que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

a_n = cantidad de formas que podemos obtener n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias)

buscamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

a_0 → # formas de obtener 0

a_1 → # formas de obtener 1

a_3 = # formas de obtener 3 como suma de las tiradas de un dado

⟶ en una tirada : 3

⟶ en dos tiradas : 1+2 , 2+1

⟶ en tres tiradas : 1+1+1

$a_3 = 4$

* formas de obtener n en 0 tiradas del dado

$a_n^{(0)}$ = # formas de obtener n en 0 tiradas

$a_0^{(0)} = 1$

$a_1^{(0)} = 0$

$a_2^{(0)} = 0$

$a_3^{(0)} = 0$

función generatriz : $f^{(0)}(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \dots = 1$

* formas de obtener n con 1 tirada del dado

$a_n^{(1)}$ = # formas de obtener n en 1 tirada

$a_0^{(1)} = 0$

$a_1^{(1)} = 1$

$a_2^{(1)} = 1$

$\vdots$

$a_6^{(1)} = 1$

$a_7^{(1)} = 0$

$a_8^{(1)} = 0$

$\vdots$

funcion generatriz de $a_n^{(1)}$: $f^{(1)}(x) = 0 + 1x + 1x^2 + \dots + 1x^6 + 0x^7 + 0x^8 + \dots$

$= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

* formas de obtener n con 2 tiradas del dado

$a_n^{(2)}$ = # formas de obtener n con 2 tiradas del dado

$a_0^{(2)} = 0$

$a_1^{(2)} = 0$

$a_2^{(2)} = 1$

$\overbrace{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}^{\text{1ra tirada}}\ \overbrace{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}^{\text{2da tirada}}$

$a_4^{(2)} = 3$ $\qquad a_n^{(2)} =$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = \underbrace{\overset{a_2^{(2)}}{1}x^2 + \overset{a_3^{(2)}}{2}x^3 + \overset{a_4^{(3)}}{3}x^4 + \cdots}_{f^{(2)}(x)}$$

coeficiente de x^4 es $a_4^{(2)}$

$a_n^{(2)}$ es el coeficiente de x^n en

\# formas de obtener n como suma de dos tiradas

función generatriz de $a_n^{(2)}$: $f^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x^n$

$$f^{(2)}(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

* formas de obtener n con i tiradas del dado

$$\underbrace{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}_{\text{1ra tirada}}\underbrace{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}_{\text{2da tirada}} \cdots\cdots \underbrace{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}_{\text{i-ésima tirada}}$$

$a_n^{(i)}$ = # formas de obtener n como suma de i tiradas

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \cdots\cdots (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

el coeficiente de x^n es $a_n^{(i)}$

función generatriz de $a_n^{(i)}$ es $f^{(i)}(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^i$

Función generatriz de a_n:

$a_n = \#$ formas de obtener n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias)

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + a_n^{(3)} + \dots + a_n^{(i)} + \dots$$

$$f(x) = f^{(0)}(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \dots + f^{(i)}(x)$$

$$= 1 + (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) + (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2 + \dots$$

$$+ \dots + (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (x+x^2+\dots+x^6)^i$$

$y = x+x^2+\dots+x^6$

$$= 1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} y^i$$

$$= \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}$$

$$= \frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4-x^5-x^6} = (1-x-\dots-x^6)^{-1}$$

Ejercicio 6
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

a_n = # formas de sacar n pesos en billetes de 100, 200, 500 y 1000

$$a_{2000} \begin{cases} \to 2 \cdot 1000 \leadsto 0 \cdot 100 + 0 \cdot 200 + 0 \cdot 500 + 2 \cdot 1000 \\ \to 2 \cdot 500 + 1 \cdot 1000 \\ \to 4 \cdot 500 \\ \to 10 \cdot 100 + 2 \cdot 500 \\ \vdots \end{cases}$$

$a_n^{(100)}$ = # formas de sacar n pesos en billetes de 100

$a_0^{(100)} = 1$

$a_1^{(100)} = 0$

$\vdots$

$a_{99}^{(100)} = 0$

$a_{100}^{(100)} = 1$

$a_{200}^{(100)} = 1$

$\vdots$

$$a_n^{(100)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es multiplo de } 100 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

función generatriz de $a_n^{(100)}$:

$$f^{(100)}(x) = 1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + \dots$$

$a_n^{(200)}$ = # formas de sacar n con billetes de 200

$$a_n^{(200)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es multiplo de } 200 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f^{(200)}(x) = 1 + x^{200} + x^{400} + x^{600} + \dots$$

$a_n^{(500)}$ = # formas de sacar n con billetes de 500

$$a_n^{(500)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es multiplo de } 500 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f^{(500)}(x) = 1 + x^{500} + x^{1000} + \dots$$

$a_n^{(1000)}$ = # formas de sacar n con billetes de 1000

$$f^{(1000)}(x) = 1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots$$

función generatriz de a_n:

$$\underbrace{(0, 100, 200, 300, \dots)}_{\text{billetes de 100}} \underbrace{(0, 200, 400, 600, \dots)}_{\text{billetes de 200}} \underbrace{(0, 500, 1000, \dots)}_{\text{billetes de 500}} \underbrace{(0, 1000, 2000, \dots)}_{\text{billetes de 1000}}$$

$a_0 = 1$

$a_{100} = 1$

$a_{200} = 2$

$a_{500} =$

$$(\underset{\overset{\shortparallel}{x^0}}{1} + x^{100} + x^{200} + \dots)(1 + x^{200} + x^{400} + \dots)(1 + x^{500} + x^{1000} + \dots)(1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots)$$

el coeficiente de x^n es a_n

la función generatriz de a_n es $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + \dots$

$$f(x) = (1 + x^{100} + x^{200} + \dots)(1 + x^{200} + x^{400} + \dots)(1 + x^{500} + x^{1000} + \dots)(1 + x^{1000} + \dots)$$

$$= \frac{1}{1-x^{100}} \cdot \frac{1}{1-x^{200}} \cdot \frac{1}{1-x^{500}} \cdot \frac{1}{1-x^{1000}}$$

$$1 + x^{100} + \overset{(x^{100})^2}{x^{200}} + \overset{(x^{100})^3}{x^{300}} + \dots \overset{y = x^{100}}{=} 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^{100}}$$

---

a_n = obtener n como suma de las tiradas de un dado

(0) formas de obtener n es 0 tiradas

(1) formas de obtener n es 1 tirada

(2) ______ 2 tiradas

(3) ______ 3 tiradas

⋮

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{n} C_i^{-n} x^i$$

$$C_i^{-n} = (-1)^i CR_i^n$$