

Ejercicio 5

Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con } c_0 = 0.$

$$\begin{cases} c_{n+1} = c_n + n2^{n-1} \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

$$c_{n+1} = c_n + n2^{n-1} \leadsto c_{n+1} - c_n = n2^{n-1}$$

① buscamos la solución general de la homogénea

$$c_{n+1} - c_n = 0 \leadsto c_{n+1} = c_n$$

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

→ 1 raíz simple de $p(\lambda)$

entonces $c_n^{(h)} = \alpha 1^n = \alpha$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & \xrightarrow{x^1} & \alpha & \xrightarrow{x^1} & \alpha & \dots & \alpha \\ c_0 & & c_1 & & c_2 & & c_n \end{array}$$

$$\boxed{c_n^{(h)} = \alpha}$$

 α lo vamos a buscar al final

② buscamos una solución particular de la no homogénea

$$c_{n+1} - c_n = n2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}n = 2^n \frac{1}{2}n$$

$$= r^n \underbrace{g(n)}_{\text{polinomio en } n}$$

→ $r = 2 \leftarrow$

→ $g(n) = \frac{1}{2}n$ polinomio de grado 1

Como 2 no es raíz de $p(\lambda) = \lambda - 1$, entonces vamos a buscar una

solución particular de la forma:

$$c_n^{(p)} = 2^n \underbrace{(an + b)}_{\text{polinomio de grado 1}}$$

$$c_{n+1}^{(p)} = 2^{n+1}(a(n+1)+b) = 2^{n+1}(an+a+b)$$

$$c_{n+1}^{(p)} - c_n^{(p)} = n 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n+1}(an+a+b) - 2^n(an+b) = n 2^{n-1}$$

↙ dividimos
entre 2^{n-1}

$$\Rightarrow 2 \cdot 2(an+a+b) - 2(an+b) = n$$

$$\Rightarrow 2(2(an+a+b) - (an+b)) = n$$

$$\Rightarrow 2(an+2a+b) = n$$

$$\Rightarrow \underline{an} + \underline{2a+b} = \underline{\frac{1}{2}n} + \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2a+b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1+b = 0 \Rightarrow b = -1$$

Entonces $\boxed{c_n^{(p)} = 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1 \right)}$

(3) sumamos $c_n^{(h)}$ y $c_n^{(p)}$ y buscamos el parámetro que falta

$$c_n = c_n^{(h)} + c_n^{(p)} = \underset{\uparrow}{\alpha} + 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1 \right)$$

$$c_0 = 0 \Rightarrow \alpha + 2^0 \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Entonces $\boxed{c_n = 1 + 2^n \left(\frac{1}{2}n - 1 \right)}$

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = r^n \underbrace{g(n)}_{\text{polinomio}}$$

① si r no es raíz de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

② si r es raíz simple de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = n r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

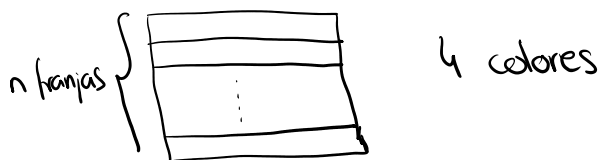
③ si r es raíz doble de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$ h del mismo grado que g

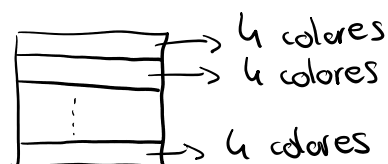
Ejercicio 3

Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

- (a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
- (b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
- (c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

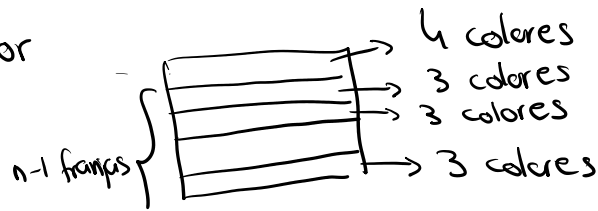


a) cantidad de banderas si no hay restricciones



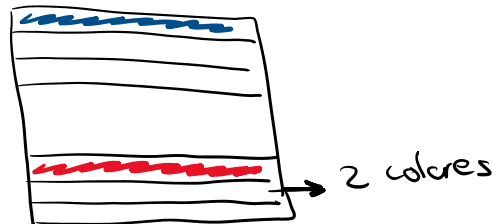
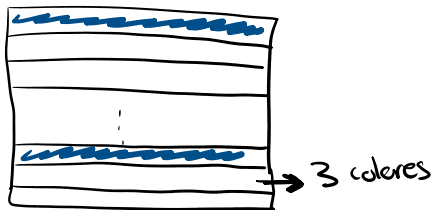
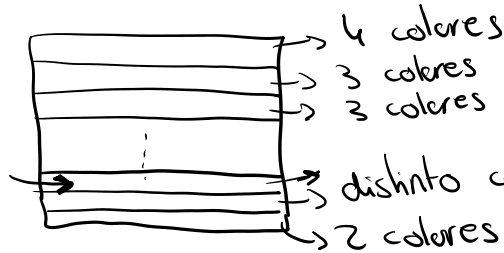
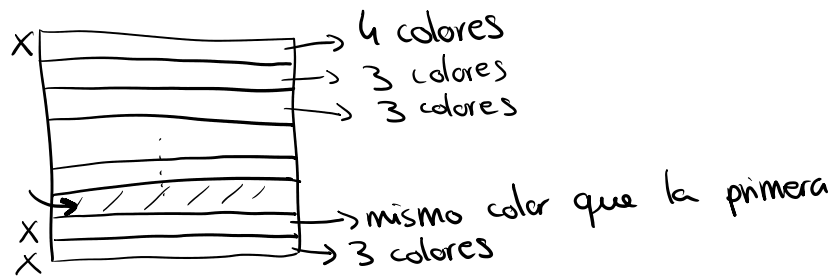
por la regla del producto hay 4^n banderas

b) cantidad de banderas si dos franjas adyacentes no pueden ser del mismo color



por la regla del producto hay $4 \cdot 3^{n-1}$ banderas

c) cantidad de banderas si dos franjas adyacentes no pueden ser del mismo color y tampoco la primera y la última

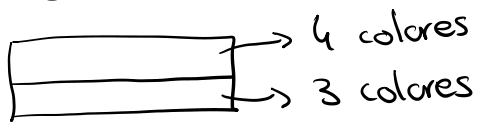


a_n = cantidad de banderas tales que no hay dos franjas consecutivas del mismo color y la primera y la última son de color distinto

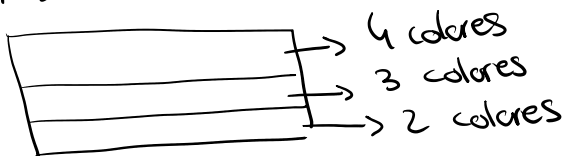
$$a_1 = 0$$

 → la primera y la última son la misma

$$a_2 = 4 \cdot 3 = 12$$



$$a_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

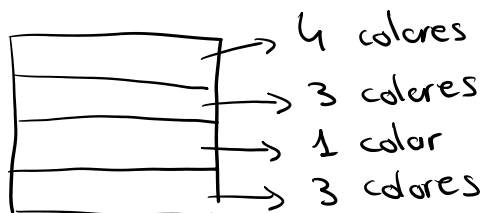


$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

$$\leadsto a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} ?$$

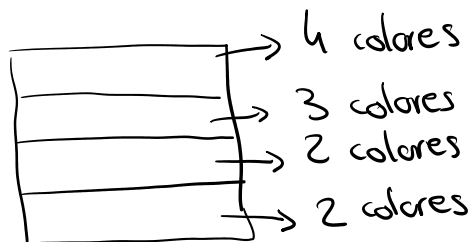
$$a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3a_2 + 2a_3$$

① la franja 1 y la franja 3 son del mismo color



$4 \cdot 3 \cdot 3$ banderas

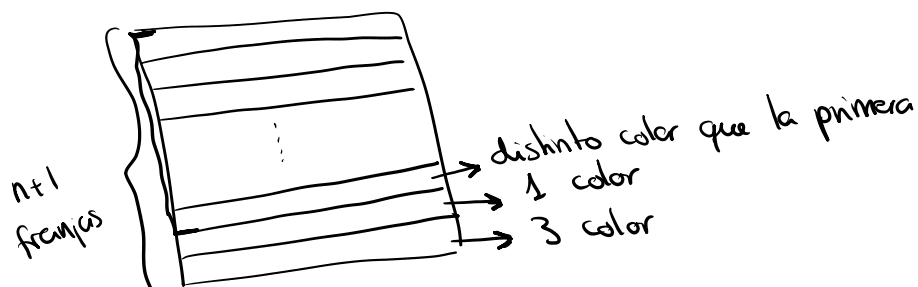
② la franja 1 y la franja 3 son de distinto color



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ banderas

$$a_{n+1} = 3a_{n-1} + 2a_n$$

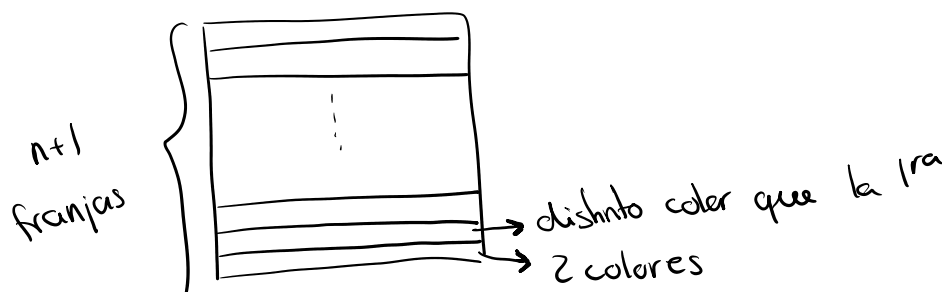
① la franja 1 y la franja n son del mismo color



} bandera de $n-1$ franjas donde la primera y la última son de $\neq$ color y dos franjas consecutivas también

$3a_{n-1}$ banderas

② la franja 1 y la franja n son de distinto color



} bandera de n franjas donde la 1ra y la última franja son de color distinto y dos franjas consecutivas también

$2a_n$ banderas

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 12 \end{cases}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \leadsto \overset{\lambda^2}{\underset{\uparrow}{a_{n+1}}} - \overset{\lambda}{\underset{\uparrow}{2a_n}} - \overset{\text{termino indep.}}{\underset{\uparrow}{3a_{n-1}}} = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -1$$

$$\text{entonces } a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 (-1)^n$$

entonces $a_n = d_1 3^n + d_2 (-1)^n$

$$a_1 = 0 \Rightarrow d_1 3^1 + d_2 (-1)^1 = 0 \Rightarrow 3d_1 - d_2 = 0$$

$$a_2 = 12 \Rightarrow d_1 3^2 + d_2 (-1)^2 = 12 \Rightarrow 9d_1 + d_2 = 12$$

$$12d_1 = 12$$

$$\Rightarrow \boxed{d_1 = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_2 = 3}$$

entonces $\boxed{a_n = 3^n + 3(-1)^n}$

$$a_3 = 3^3 + 3(-1)^3 = 27 - 3 = 24 \checkmark$$