Relaciones de recurrencia lineales de orden 2 homogéneas:

$$\begin{cases} c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0 \qquad c_2, c_1, c_0 \in \mathbb{R} \\ a_0, a_1 \end{cases}$$

$p(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$ polinomio caracteristico

1. p tiene dos raices reales distintas λ_1, λ_2

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

α_1 y α_2 son reales que dependen de las condiciones iniciales

2. p tiene una raiz real doble λ_1

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 n \lambda_1^n$$

α_1 y α_2 son reales que dependen de las condiciones iniciales

Ejercicio 1

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \rightsquigarrow a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \qquad \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 6}}{2}$

$\Delta = 25 - 24 = 1 \longrightarrow \lambda_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

$\longrightarrow \lambda_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$

Entonces $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha_1 3^0 + \alpha_2 2^0 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$a_1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 3^1 + \alpha_2 2^1 = 3 \Rightarrow 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 & (1) \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 & (2) \end{cases}$$

$(2) - 3(1) : \quad -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$ y $\boxed{\alpha_1 = 1}$

Entonces $\boxed{a_n = 3^n}$

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $b_0 = 5, b_1 = 12$.

$$\begin{cases} b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0 \\ b_0 = 5 \\ b_1 = 12 \end{cases}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 \qquad \lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 9 \cdot 4}}{2}$

$\Delta = 36 - 36 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dfrac{6}{2} = 3$ raiz doble

Entonces $b_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$

$b_0 = 5 \Rightarrow \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = 5 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 5}$

$b_1 = 12 \Rightarrow 5 \cdot 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 12 \Rightarrow 15 + 3\alpha_2 = 12 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -1}$

Entonces $\boxed{b_n = 5 \cdot 3^n - n 3^n}$

Relaciones de recurrencia lineales de orden 2 no homogeneas

$$\begin{cases} c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n) \\ a_0, a_1 \end{cases}$$

(1) buscar la solución general de la relación de recurrencia homogénea

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$$

$\longrightarrow a_n^{(h)}$ dependiendo de parámetros

(2) buscar una solución particular de la relación no homogénea

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$$

$\longrightarrow a_n^{(p)}$

(3) sumamos $a_n^{(h)}$ y $a_n^{(p)}$ y buscamos los parámetros

$\longrightarrow a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

Búsqueda de la solución particular: vamos a considerar

$$c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = r^n g(n)$$ donde $r \in \mathbb{R}$
g es un polinomio en n

(1) si r no es raiz del polinomio característico
vamos a buscar una solución particular de la forma
$a_n^{(p)} = r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

(2) si r es raiz simple del polinomio caracteristico vamos a buscar una solución particular de la forma

$a_n^{(p)} = n r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

(3) si r es raiz doble del polinomio caracteristico vamos a buscar una solución particular de la forma

$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g.

Ejercicio 5

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

$$\begin{cases} d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1 \\ d_0 = 0 \\ d_{100} = 0 \end{cases}$$

$$d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1 \rightsquigarrow \frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = -1$$

(1) buscamos la solución general de la homogénea

$$\frac{1}{2}d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2}d_{n-1} = 0$$

$$p(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\Delta = 1 - 4\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ raiz doble de } p(\lambda)$$

$$d_n^{(h)} = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$$

$$d_n^{(h)} = \alpha_1 1^n + \alpha_2 n 1^n = \alpha_1 + \alpha_2 n$$

(2) buscamos <u>una</u> solución particular de la no homogénea

$$\frac{1}{2} d_{n+1} - d_n + \frac{1}{2} d_{n-1} = -1 = 1^n \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{polinomio de grado } 0}$$

$$= r^n g(n)$$

como 1 es raíz doble del polinomio característico, vamos a buscar una solución particular de la forma

$$d_n^{(p)} = n^2 1^n \underline{c}$$

$$d_n^{(p)} = cn^2$$

$$d_{n-1}^{(p)} = c(n-1)^2 = c(n^2 - 2n + 1) = cn^2 - 2cn + c$$

$$d_{n+1}^{(p)} = c(n+1)^2 = c(n^2 + 2n + 1) = cn^2 + 2cn + c$$

$$\frac{1}{2} d_{n+1}^{(p)} - d_n^{(p)} + \frac{1}{2} d_{n-1}^{(p)} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(cn^2 + 2cn + c) - cn^2 + \frac{1}{2}(cn^2 - 2cn + c) = -1$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} cn^2} + \cancel{cn} + \frac{1}{2}c - \cancel{cn^2} + \cancel{\frac{1}{2} cn^2} - \cancel{cn} + \frac{1}{2}c = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -1}$$

Entonces $\boxed{d_n^{(p)} = -n^2}$

(3) Sumamos $d_n^{(h)}$ y $d_n^{(p)}$ y buscamos los parámetros

$$d_n = d_n^{(h)} + d_n^{(p)} = \alpha_1 + \alpha_2 n - n^2$$

$$d_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 - 0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$d_{100} = 0 \Rightarrow \alpha_2 \cdot 100 - 100^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 100}$$

$$\alpha_2 \cdot 100 = 100^2$$

Entonces $d_n = 100n - n^2$

$$\boxed{d_n = n(100-n)}$$

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

$e_{n+1} - 2e_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda - 2 \longrightarrow 2$ raiz simple

$0e_{n+2} + e_{n+1} - 2e_n = 2^n = \underline{2}^n \underbrace{(1)}$

polinomio de grado 0

$e_n^{(p)} = n2^n c$

$p(\lambda) = 0\lambda^2 + \lambda - 2$

$f_{n+1} - 2f_n = \underline{2}^n \underbrace{(n+1)}$

polinomio de grado 1

$f_{n+1} - 2f_n = 0$

$p(\lambda) = \lambda - 2 \longrightarrow 2$ raiz simple

$2^n(an+b)$

$f_n^{(p)} = n2^n(an+b)$

Practico 4

Ejercicio 3
Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

n personas en una reunion

posibles cantidades de amigos para una de las n personas

$$\underbrace{0, 1, 2, \ldots, n-1}_{n \text{ posibilidades}}$$

1. supongamos que todas las personas tienen por lo menos un amigo en la reunion

   las palomas son las n personas

los nidos son las cantidades posibles de amigos que tiene cada persona

$1, 2, 3, \ldots, n-1$

1 ✓
2
3 ✓✓
⋮
$n-1$

entonces tenemos n palomas y $n-1$ nidos

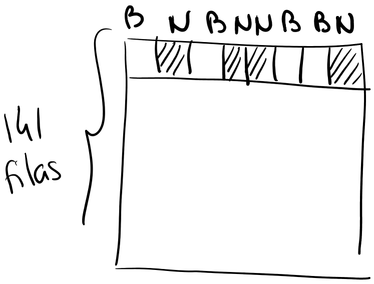
(2) Suponemos que hay k personas que no tienen ningún amigo en la reunión

→ hay $\overbrace{n-k \text{ personas}}^{\text{PALOMAS}}$ que tienen por lo menos un amigo en la reunión

NIDOS → las posibles cantidades de amigos que puede tener una de estas $n-k$ personas:

$1, 2, 3, \ldots, n-k-1$

Ejercicio 6
Consideremos un tablero rectangular compuesto por 141 filas y 8 columnas, definiendo en total 141×8 celdas. Cada celda se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro celdas pintadas de negro. Demostrar que hay al menos ~~7~~ 3 filas con igual secuencia de colores.

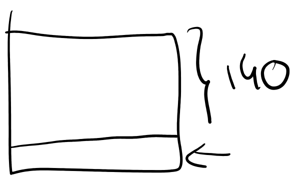


formas distintas de pintar una fila $= C^8_4 = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$

$f : \{\text{filas}\} \longrightarrow \{\text{formas de pintar una fila}\}$

$\# \{\text{filas}\} = 141$

$\# \{\text{formas de pintar una fila}\} = 70$



$\Rightarrow$ hay un elemento $\{\text{formas de pintar}\}$ que tiene $\left\lceil \frac{141}{70} \right\rceil = 3$

$\Rightarrow$ hay tres filas pintadas de la misma forma

Ejercicio 5
Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.