Práctico 4

Ejercicio 8
Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50.

$\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

vamos a elegir <u>n</u> numeros de este conjunto

$\rightarrow$ las palomas son los n números que vamos a elegir

$\{1, 49\}$
$\{2, 48\}$
$\{3, 47\}$
$\vdots$
$\{24, 26\}$
24 conjuntos

$\{25\}$
$\{50\}$
$\{51\}$
$\vdots$
$\{100\}$
52 conjuntos

tenemos <u>76</u> nidos

si tomamos 77 elementos, como vamos a tener más palomas que nidos, va a existir un nido con dos palomas.
Es decir dentro de los 77 elementos van a haber 2 que suman 50.

Practico 5

Ejercicio 2
Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

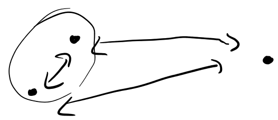
a_n = la cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunion

$a_0 = 0$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 3 = a_2 + 2 = 1 + 2$



a_{n+1} = la cantidad de saludos entre $n+1$ personas

→ n personas ya y se saludaron: a_n saludos

→ la persona $n+1$ saluda a las n personas que ya habia llegado: n saludos

entonces $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + n \\ a_0 = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow a_n = a_{n-1} + (n-1)$

$\rightsquigarrow a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + n \\
&= \boxed{a_{n-1}} + (n-1) + n \\
&= \boxed{a_{n-2} + (n-2)} + (n-1) + n \\
&= a_{n-3} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= a_1 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\
&= a_1 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \overbrace{a_0}^{=0} + 0 + 1 + 2 + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(n-1)n}{2}}$$

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

a_n = el número de secuencias de 0's y 1's de largo n donde no aparecen 2 ceros seguidos.

$a_1 = 2$

1 y 0

$a_2 = 3$

10, 01, 11, $\cancel{00}$

$a_3 = 5$

111, 010, 110, 101, 011

a_{n+1} = numero de secuencias de 0's y 1's de largo n+1 que no tienen dos 0's seguidos.

(1) secuencias de largo n+1 que terminan en 1

$$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \cdots\ \underset{n-1}{\_}\ \underset{n}{\_}}_{\text{cualquier secuencia de largo n que no tenga dos 0's seguidos}}\ \underset{n+1}{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$ a_n secuencias

(2) secuencias de largo $n+1$ que terminan en 0

$$\underbrace{\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \cdots\ \underset{n-1}{\_}}_{\text{cualquier secuencia de largo } n-1 \text{ que no tenga dos 0's seguidos}}\ \underset{n}{1}\ \underset{n+1}{0}$$

$\Rightarrow$ a_{n-1} secuencias

Entonces por la regla de la suma $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

(e) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

a_n = el número de secuencias de 1's y 2's que suman n

$a_1 = 1$ la única secuencia es 1

$a_2 = 2$ las secuencias son 11 y 2

$a_3 = 3$ las secuencias son 111, 12 y 21

a_{n+1} = el número de secuencias de 1's y 2's que suman $n+1$

(1) secuencias que terminan en 1

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{\text{sumados dan } n}\ 1$$

podemos poner cualquier

a_n secuencias

secuencia de 1's y 2's
que sumen n

(2) secuencias que terminan en 2

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \ldots\ \_}\ \underline{2}$$

podemos poner cualquier secuencia de 1's y 2's que sumen n-1

a_{n-1} secuencias

Entonces por la regla de la suma

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Relación de recurrencia de orden 1 homogenea

$$\begin{cases} a_{n+1} = C a_n & , C \in \mathbb{R} \\ a_0 = A & , A \in \mathbb{R} \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{a_n = C^n A}$$

por ejemplo: $\begin{cases} a_{n+1} = 3 a_n \\ a_0 = 2 \end{cases}$ $\rightsquigarrow a_1 = 3 a_0 = 3 \cdot 2$

$$\underset{a_0}{2} \xrightarrow{\times 3} \underset{a_1}{3 \cdot 2} \xrightarrow{\times 3} \underset{a_2}{3^2 \cdot 2} \xrightarrow{\times 3} \underset{a_3}{3^3 \cdot 2} \qquad \underset{a_n}{3^n \cdot 2}$$

$$\boxed{a_n = 3^n \cdot 2}$$

Relación de recurrencia de orden 2 homogénea

$$\begin{cases} C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_0 a_n = 0 \qquad C_2, C_1, C_0 \in \mathbb{R} \\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

buscamos soluciones $a_n = \alpha \lambda^n$ $\quad \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \quad \alpha, \lambda \neq 0$

$$a_{n+1} = \alpha \lambda^{n+1}$$

$$a_{n+2} = \alpha \lambda^{n+2}$$

$$C_2 \alpha \overbrace{\lambda^{n+2}}^{\lambda^n \cdot \lambda^2} + C_1 \alpha \overbrace{\lambda^{n+1}}^{\lambda^n \cdot \lambda} + C_0 \alpha \lambda^n = 0$$

dividimos entre $\alpha \lambda^n$:

$$C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0$$

$p(\lambda) = c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0$ es el polinomio característico de la recurrencia

① p tiene dos raíces reales distintas λ_1, λ_2

$\rightarrow$ la solución general es $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$

donde α_1 y α_2 son números reales que dependen de las condiciones iniciales

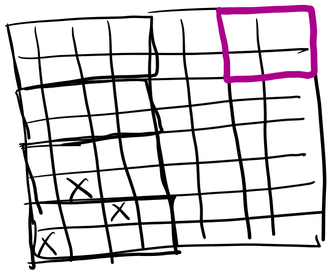
② p tiene una raíz real doble λ_1

$\rightarrow$ la solución general es $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \overset{\downarrow}{n} \lambda_1^n$

donde α_1 y α_2 son números reales que dependen de las condiciones iniciales.

Práctico 4

Ejercicio 7
Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.



Vamos a mirar un tablero 2×4

los nidos: $\{b_1, a_3\}$ $\{a_1, b_3\}$ $\{b_4, a_2\}$ $\{a_4, b_2\}$

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4

la máxima cantidad de caballos en el tablero 2×4 es 4

en el tablero 8×8 hay 8 tableros 2×4

$\Longrightarrow$ la máxima cantidad de caballos en el tablero 8×8 va a ser menor o igual a $4 \times 8 = 32$

32 caballos