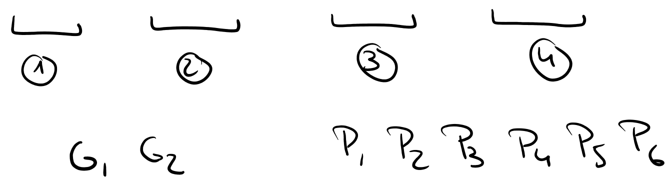
Practico 3

Ejercicio 7

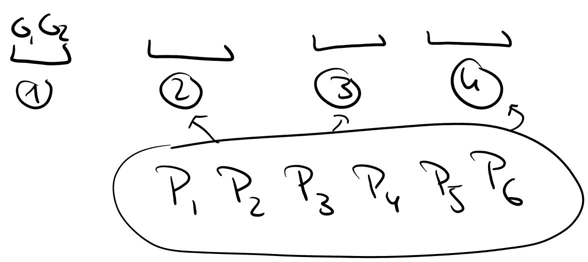
Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites, sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?



CASO 1: los dos gatos van al mismo escondite

etapa 1: elegimos el escondite donde van los gatos

$\longrightarrow$ 4 formas



$f: \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} \to \{2, 3, 4\}$

$f(P_1)$ = escondite al que va P_1

etapa 2: distribuimos los perros entre los 3 escondites que quedan

$\longrightarrow$ la cantidad de formas de hacerlo es $Sob(6,3)$

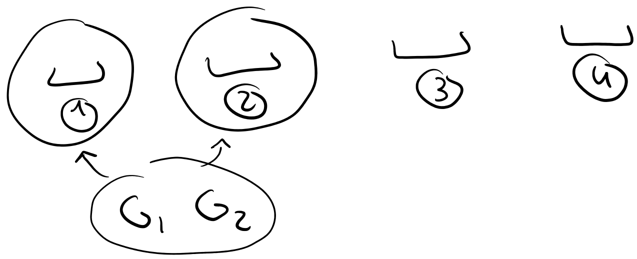
el total del caso 1 es: $4 \cdot Sob(6,3)$

CASO 2: los dos gatos van a escondites diferentes

etapa 1: elegimos los 2 escondites donde van los gatos

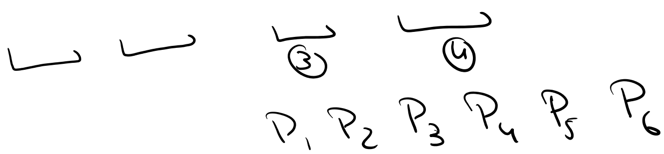
$\longrightarrow$ $\binom{4}{2}$ formas

<u>etapa 2</u>: formas de distribuir los 2 gatos en los dos escondites



$\rightarrow$ 2 formas

<u>etapa 3</u>: distribuimos los perros



$\rightarrow$ la cantidad de formas de hacerlo es $Sob(6,2)$

total del caso 2: $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot Sob(6,2)$

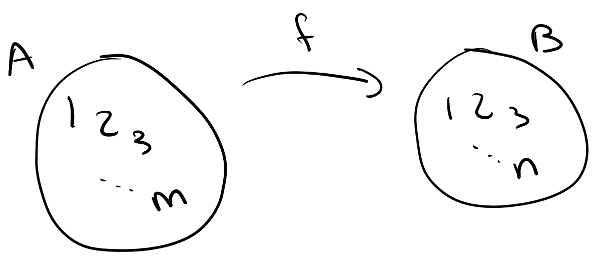
Entonces como los dos casos son disjuntos, por la regla de la suma

$$4 \cdot Sob(6,3) + \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot Sob(6,2)$$

Principio del palomar

tenemos m palomas y n nidos

si $m > n$ y todas las palomas van algún nido entonces existe un nido donde hay por lo menos 2 palomas



si $m > n$ entonces f no puede ser inyectiva

Practico 4

Ejercicio 1

Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

a la misma hora

cantidad de tiempos distintos en los que pueden nacer las personas:

$$24 \times 60 \times 60 = 86400$$

las palomas son las 100 000 personas

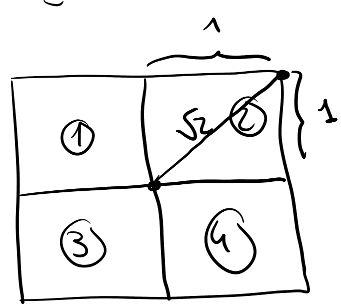
los nidos son los distintos tiempos en lo que pueden nacer las personas

como tenemos más palomas que nidos, por el principio del palomar hay un nido que tiene por lo menos dos palomas es decir hay dos personas que nacieron a la misma hora.

Ejercicio 4
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.

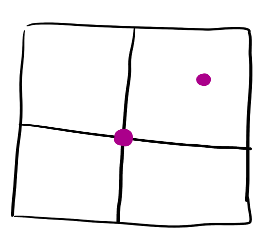
las palomas son los cinco puntos

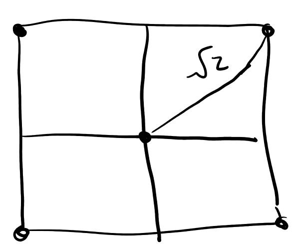
para los nidos buscamos regiones dentro del cuadrado 2×2 tales que si dos puntos están en la misma región entonces están a distancia $\leq \sqrt{2}$



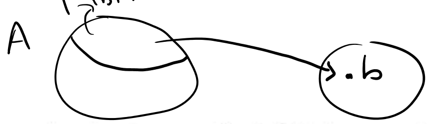
los nidos son las regiones 1, 2, 3 y 4

entonces por palomar hay dos puntos que están en la misma región y esos dos puntos van a estar a distancia $\leq \sqrt{2}$





$\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ elementos



Ejercicio 5

Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| / |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

$f: A \to B$ tal que $|A| > |B|$

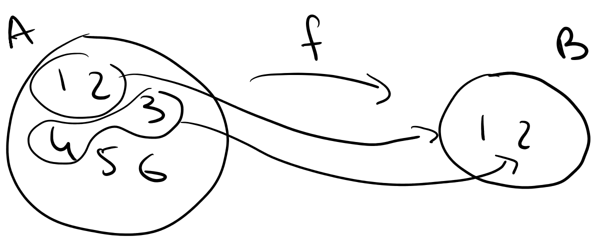
$\lfloor \ \rfloor$ ↳ redondeado para abajo

$\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ ↳ redondeado para arriba

$\Rightarrow$ f no puede ser inyectiva

o sea hay un elemento de B

que tiene por lo menos dos preimágenes.



$f(1) = 1$ $\quad f(2) = 2$

$f(3) = 1$ $\quad f(4) = 2$

$f(5) = 1$ $\quad f(6) = 2$

existe un elemento de B que tiene por lo menos 3 preimágenes

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{6}{2} = 3$$

Vamos a probar:

$f: A \to B$ tal que $\underbrace{|A| = 6}$ y $|B| = 2$ tiene por lo menos 3 preimágenes

entonces existe $b \in B$ tal que b tiene por lo menos 3 preimágenes

Supongamos por absurdo que todos los elementos de B tienen a lo sumo 2 preimágenes.

$$|A| = \underbrace{\#\text{ preimagenes de } 1}_{\leq 2} + \underbrace{\#\text{ preimágenes de } 2}_{\leq 2} \leq 2 + 2 = 4$$

absurdo porque $|A| = 6$

En general:

Queremos probar:

$f: A \to B$ con $|A| > |B|$

entonces existe $b \in B$ que tiene por lo menos $\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$ preimágenes

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{|B|}\}$

Supongamos por absurdo que todo elemento de B tiene a lo sumo

$\underbrace{\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1}$ preimágenes

$$|A| = \underbrace{\#\text{ preimagenes de } b_1}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1} + \underbrace{\#\text{ preimágenes de } b_2}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1} + \dots + \underbrace{\#\text{ preimágenes de } b_{|B|}}_{\leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1}$$

$$\leq \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right) |B|$$

$$< \frac{|A|}{\cancel{|B|}} \cancel{|B|} = |A| \quad \Rightarrow |A| < |A|$$

absurdo!

$$\frac{|A|}{|B|} = 2,1 \rightsquigarrow \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil = 3 \rightsquigarrow \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 = 2 < 2,1 = \frac{|A|}{|B|}$$

$$\frac{|A|}{|B|} = 2 \rightsquigarrow \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil = 2 \rightsquigarrow \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 = 1 < 2 = \frac{|A|}{B}$$

$$\boxed{\left\lceil \frac{|A|}{|B} \right\rceil - 1 < \frac{|A|}{|B|}}$$

Ejercicio 2
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

tomamos un subconjunto de S formado por 6 elementos

$\rightarrow$ en el subconjunto hay 2 elementos que suman 10

$\{1,9\}$ $\{3,7\}$ $\{5\}$

$\boxed{\{2,8\}}$ $\{4,6\}$

las palomas son los 6 elementos

los nidos los los cinco subconjuntos

como hay más palomas que nidos, por palomar, 2 elementos de los seis que elegimos tienen que pertenecer al mismo subconjunto y por lo tanto esos dos elementos suman 10.

Ejercicio 5
Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$0 < x_1 \Rightarrow 1 \leq x_1$

$1 < x_2 < 5 \Rightarrow 2 \leq x_2 \leq 4$

Ejercicio 6
Calcular cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los pares no están en su posición original.

(c) Los pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4}\ \underbrace{5\ 6\ 7\ 8\ 9}$