

PRÁCTICO 3

Ejercicio 5

Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(b) $\underbrace{0 \leq x_1 \leq 5}, \underbrace{0 \leq x_2 \leq 6}, \underbrace{0 \leq x_3 \leq 4}, \underbrace{0 \leq x_4 \leq 8}$.

$U = \{ \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, \underline{3 \leq x_3}, 0 \leq x_4 \}$

$|U| = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \text{ con } 0 \leq x_i$
 $= CR_{16}^4$

$c_1 = \text{una solución con } x_1 \geq 6$

$c_2 = \text{una solución con } x_2 \geq 7$

$c_3 = \text{solución con } \underline{x_3 \geq 8}$

$c_4 = \text{solución con } x_4 \geq 9$



$-1 \leq x_1 \leq 8$
 $0 \leq x_1 + 1 \leq 9$

$-2 \leq x_1 \leq 4 \leadsto -1 \leq x_1 \leq 4$
 $\leadsto 0 \leq x_1 + 1 \leq 5$

$N(c_1) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3$
 $\text{y } x_4 \geq 0$

$= \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \text{ con } x_1 \geq 0$

$= CR_{10}^4$

$N(c_2) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 7, \underline{x_3 \geq 3}$
 $\text{y } x_4 \geq 0$

$= CR_9^4$

$N(c_3) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8$
 $\text{y } x_4 \geq 0$

$= CR_{11}^4$

$N(c_4) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3$
 $\text{y } x_4 \geq 9$

$= CR_7^4$

$$N(c_1, c_2) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 6, x_2 \geq 7, x_3 \geq 3 \text{ y } x_4 \geq 0 \\ = CR_3^4$$

$$N(c_1, c_3) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8 \text{ y } x_4 \geq 0 \\ = CR_5^4$$

$$N(c_1, c_4) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 3 \text{ y } x_4 \geq 9 \\ = CR_1^4$$

$$N(c_2, c_3) = \text{cantidad de soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 7, x_3 \geq 8 \text{ y } x_4 \geq 0 \\ = CR_4^4$$

$$N(c_2, c_4) = \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 7, x_3 \geq 3 \text{ y } x_4 \geq 9 \\ = CR_0^4 = C_0^3 = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$N(c_3, c_4) = \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8 \text{ y } x_4 \geq 9 \\ = CR_2^4$$

$$N(c_1, c_2, c_3) = \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \text{ con } x_1 \geq 6, x_2 \geq 7, x_3 \geq 8 \text{ y } x_4 \geq 0 \\ = 0$$

$$N(c_1, c_3, c_4) = 0$$

$$N(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

$$N(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4) = |U| - \sum_{i=1}^4 N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} N(c_i, c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \overset{0}{N(c_i, c_j, c_k)} + \overset{0}{N(c_1, c_2, c_3, c_4)} \\ = CR_{16}^4 - (CR_{10}^4 + CR_9^4 + CR_{11}^4 + CR_7^4) \\ + (CR_3^4 + CR_5^4 + CR_1^4 + CR_4^4 + CR_0^4 + CR_2^4) \\ = 105$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19 \quad \text{con} \quad -3 \leq x_1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3 = 19 + 3 \quad -3 \leq x_1$$

$$\underbrace{(x_1 + 3)}_{x'_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 22$$

$$0 \leq \underbrace{(x_1 + 3)}_{x'_1}$$

$$0 \leq x'_1$$

$$x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22 \quad x'_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

Ejercicio 6

↓↓↓↓

Calcular cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los pares no están en su posición original.

$$b) \mathcal{U} = \{ \text{permutaciones de } 123456789 \}$$

$$|\mathcal{U}| = 9!$$

$$\downarrow$$

$$1 \underline{2} 4 3 6 5 8 7 9 \quad X$$

c_1 = el número 2 queda en su posición original

c_2 = el número 4 queda en su posición original

c_3 = el número 6 queda en su posición original

c_4 = el número 8 queda en su posición original

$$N(c_1) = \text{permutaciones} \quad - \quad \underline{2} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$= 8!$$

$$N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = 8!$$

$$N(c_1, c_2) = \text{permutaciones} - \frac{2}{2} - \frac{4}{4} - \dots - \dots$$

$$= 7!$$

$$N(c_1, c_3) = N(c_1, c_4) = N(c_2, c_3) = N(c_2, c_4) = N(c_3, c_4) = 7!$$

$$N(c_1, c_2, c_3) = 6!$$

$$N(c_1, c_3, c_4) = 6!$$

$$N(c_1, c_2, c_3, c_4) = 5!$$

$$N(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4) = |U| - \sum_{i=1}^4 \overset{8!}{N(c_i)} + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \overset{7!}{N(c_i, c_j)} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \overset{6!}{N(c_i, c_j, c_k)} + N(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$$= 9! - 4 \cdot 8! + \binom{4}{2} \cdot 7! - \binom{4}{3} \cdot 6! + 5!$$

a) $U = \{ \text{permutaciones de } 123456789 \}$

$c_1 = 1$ queda en su posición original

$c_2 = 2$ queda en su posición original

$\vdots$
 $c_9 = 9$ queda en su posición original

$$N(c_1) = 8!$$

$$N(c_1, c_2) = 7!$$

$$N(c_1, c_2, c_3) = 6!$$

$$N(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6, \bar{c}_7, \bar{c}_8, \bar{c}_9) = |U| - \sum_{i=1}^9 N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 9} N(c_i, c_j) - \sum$$

$$= 9! - 9 \cdot 8! + \binom{9}{2} 7! - \binom{9}{3} 6! + \binom{9}{4} 5! - \binom{9}{5} 4!$$

$$+ \binom{9}{6} 3! - \binom{9}{7} 2! + \binom{9}{8} 1! - 1$$

Ejercicio 4

¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

x_1 = primer dígito

x_2 = segundo dígito

$$0000001 = 1$$

x_3, x_4, x_5, x_6, x_7

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

$$U = \{ \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31 \text{ con } 0 \leq x_i \}$$

$$|U| = CR_{31}^7$$

c_1 = solución con $x_1 > 10$

c_2 = solución con $x_2 > 10$

$\vdots$

c_7 = solución con $x_7 > 10$

$$N(c_1) = \text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31 \text{ con } x_1 > 10, x_i \geq 0$$

$$= CR_{21}^7$$

$$N(c_1) = CR_{21}^7$$

$$N(c_1, c_2) = CR_{11}^7$$

$$N(c_1, c_2, c_3) = CR_1^7$$

$$N(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \overline{c_4} \overline{c_5} \overline{c_6} \overline{c_7}) = |U| - \sum_{i=1}^7 \overbrace{N(c_i)}^{CR_{21}^7} + \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \overbrace{N(c_i, c_j)}^{CR_{11}^7} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} \overbrace{N(c_i, c_j, c_k)}^{CR_1^7}$$

$$= CR_{31}^7 - 7 \cdot CR_{21}^7 + \binom{7}{2} \cdot CR_{11}^7 - \binom{7}{3} \cdot \underbrace{CR_1^7}_{=7}$$