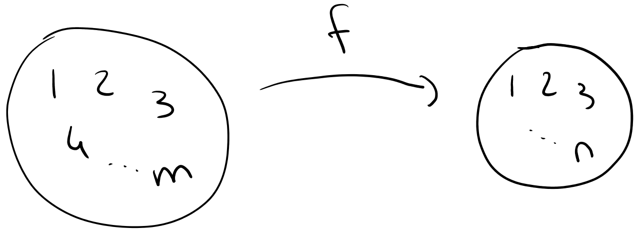
Ejercicio 13

Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, contar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.



etapa 1 : elegimos $f(1)$

$\longrightarrow$ n posibilidades

etapa 2 : elegimos $f(2)$

$\longrightarrow$ n posibilidades

⋮

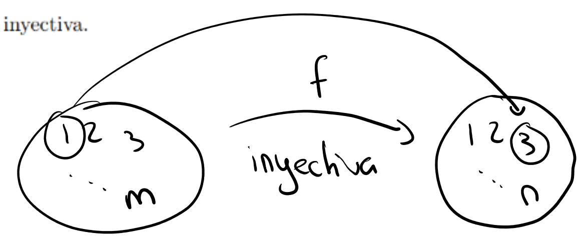
etapa m : elegimos $f(m)$

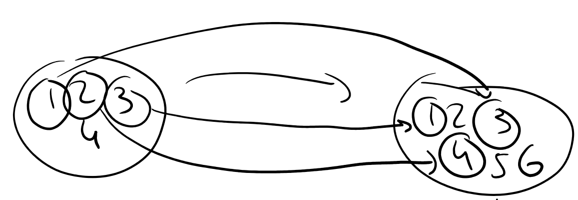
$\longrightarrow$ n posibilidades

Por la regla del producto, la cantidad de funciones es

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{m \text{ veces}} = n^m$$

(b) f es inyectiva.





$f(4)$ tiene $6-3$ posibilidades

$6-(4-1)$

• si $m > n$: 0 funciones inyectivas

- si $m \leq n$

<u>etapa 1</u>: elegimos $f(1)$
$\longrightarrow$ n posibilidades

<u>etapa 2</u>: elegimos $f(2)$ $\longleftarrow$
$\longrightarrow$ $n-1$ posibilidades

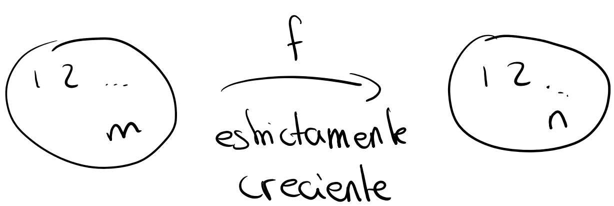
$\vdots$

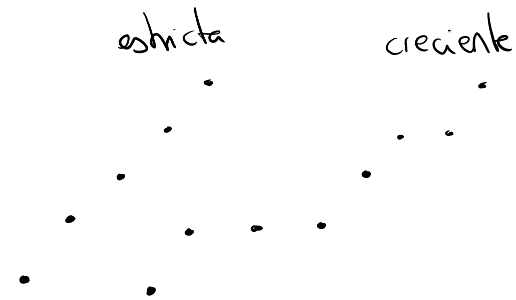
<u>etapa m</u>: elegimos $f(m)$
$\longrightarrow n-(m-1) = n-m+1$

por la regla del producto la cantidad de funciones inyectivas es

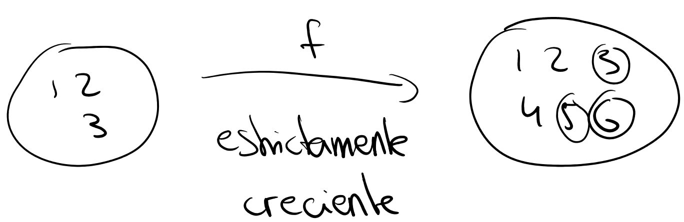
$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} = A^n_m$$

(d) f es monótona creciente estrictamente.





$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(m)$$



$\mathrm{Im}(f) = \{3, 5, 6\}$

entonces $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 5 \\ f(3) = 6 \end{cases}$

Para construir una función $\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ tenemos que elegir los 3 valores que están en la imágen y la cantidad de formas de hacer esto es C^6_3

la cantidad de funciones crecientes estrictas de $\{1,2,3\}$ en $\{1,2,3,4,5,6\}$ es C^6_3

en general: la cantidad de funciones $\{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ crecientes estrictas es C^n_m $\quad m \leq n$

si $m > n$: 0 funciones crecientes estrictas

Ejercicio 14

Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$.

$\binom{n}{i} = C^n_i$

$Sob(m,i)$ = cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de i elementos

n^m = cantidad de funciones $\{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\text{regla de la suma}} \underbrace{\binom{n}{i} \cdot Sob(m,i)}_{\text{regla del producto}}$$

caso 1: la imágen tiene un solo elemento (función constante)

$$\underbrace{\binom{n}{1}} \cdot Sob(m,1)$$

etapa 1: elegimos un valor de $\{1,\dots,n\}$

$\rightarrow n = \binom{n}{1}$ posibilidades

etapa 2: elegimos una función sobreyectiva de $\{1,\dots,m\}$ en el valor que elegimos $\rightarrow Sob(m,1) = 1$ posibilidades

caso 2: la imágen tiene dos elementos

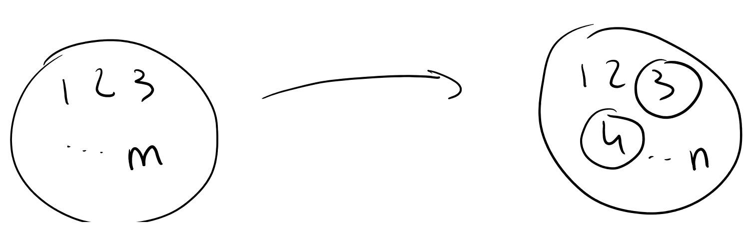
etapa 1: elegimos dos valores de $\{1,\dots,n\}$

$\rightarrow \binom{n}{2}$ posibilidades

etapa 2: elegimos una función sobreyectiva de $\{1,\dots,m\}$ en los dos valores que elegimos

$\rightarrow Sob(m,2)$ posibilidades

por la regla del producto $\binom{n}{2} Sob(m,2)$



caso i: la imágen tiene i elementos

$$\underbrace{\binom{n}{i}}\ \underbrace{Sob(m,i)}$$

formas de elegir los i valores de la imágen

cantidad de funciones sobreyectivas de $\{1,\dots,m\}$ en el conjunto imágen que elegimos

Por la regla de la suma, la cantidad de funciones $\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ es

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$$

Principio de inclusión - exclusión

S un conjunto

$|S| = \#S = card(S) =$ la cantidad de elementos de S

$c_1, c_2, \dots, c_r$ condiciones que pueden o no verificar los elementos de S

$N(c_i) =$ la cantidad de elementos de S que verifican c_i

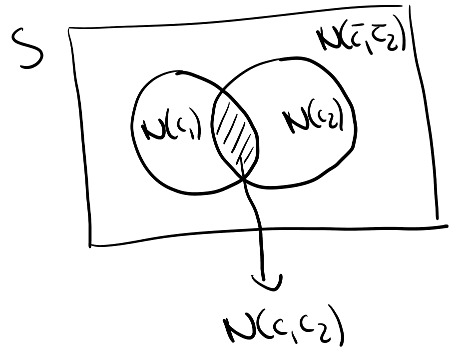
$N(c_i c_j) =$ la cantidad de elementos de S que verifican c_i y c_j

$N(c_i c_j c_k) =$ la cantidad de elementos de S que verifican c_i, c_j y c_k

$N(\overline{c_i}) =$ la cantidad de elementos de S que no verifican c_i

$N(\overline{c_i}\,\overline{c_j}) =$ ________________ ni c_i ni c_j

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\cdots\bar{c}_r) = ?$$



cantidad de elementos de S que verifican c_1 o c_2:

$$N(c_1) + N(c_2) - N(c_1c_2)$$

$N(\bar{c}_1\bar{c}_2) = |S|$ - la cantidad de elementos que verifican c_1 o c_2

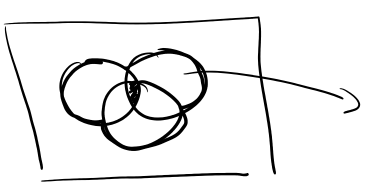
$$= |S| - (N(c_1) + N(c_2) - N(c_1c_2))$$

$$= |S| - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2)$$

$$= |S| - (N(c_1) + N(c_2)) + N(c_1c_2)$$

$$= |S| -$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\cdots\bar{c}_r) = |S| - (N(c_1) + N(c_2) + \cdots + N(c_r))$$
$$+ (N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_{r-1}c_r))$$
$$- (N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_3c_4) + \cdots + N(c_{r-2}c_{r-1}c_r))$$
$$+ \cdots\cdots$$



$$\to N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) - N(c_1c_2) - N(c_1c_3) - N(c_2c_3)$$
$$+ N(c_1c_2c_3)$$

Ejercicio 10

Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos usando la regla del producto.

$\{1, 2, 3, \dots, n\}$

etapa 1: ver si 1 está en el subconjunto

$\rightarrow$ 2 posibilidades

etapa 2: ver si 2 está en el subconjunto

$\rightarrow$ 2 posibilidades

$\Rightarrow 2^n$

otra forma:

caso 1: el subconjunto con tiene ningún elemento

$\rightarrow$ 1 posibilidad

caso 2: el subconjunto tiene 1 elemento

$\rightarrow \binom{n}{1}$ posibilidades

caso 3: el subconjunto tiene 2 elementos

$\rightarrow \binom{n}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^k 1^{n-k}}_{=1} = (1+1)^n = 2^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\underset{1}{(x+y)}\underset{2}{(x+y)}\underset{3}{(x+y)}\overset{4}{} \cdots \underset{n-1}{(x+y)}\underset{n}{(x+y)}$$

$$x \quad x \quad y \quad x \quad \cdots \quad y \quad x \longrightarrow x^k y^{n-k}$$

elegir x k veces y elegir y $n-k$ veces

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

$$\alpha_{ijkl}(2x)^i(4y)^j(2z)^k 5^l \quad \text{con } i+j+k+l = 14$$

$$= \alpha_{ijkl} 2^i 4^j 2^k 5^l x^i y^j z^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = 1 \\ j = 3 \\ k = 5 \\ l = 5 \end{cases}$$

$$\alpha_{1,3,5,5}\, 2^1 4^3 2^5 5^5 x y^3 z^5 = \frac{14!}{1!3!5!5!} \overbrace{2^1 \underbrace{4^3}_{2^6} 2^5}^{2^{12}} 5^5 x y^3 z^5$$

la cantidad de palabras con

$2x$ una vez

$4y$ tres veces

$2z$ 5 veces

5 5 veces

$$\frac{14!}{1!3!5!5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5!}} = 14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$